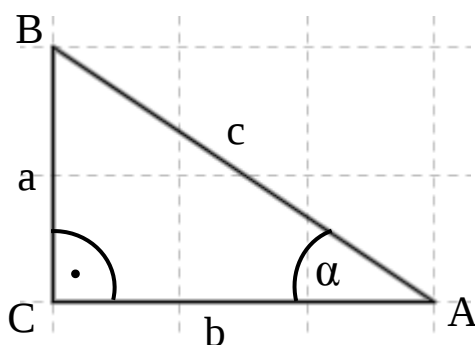


3 Goniometrie

3.1 Goniometrické funkce ostrého řhu



c – přepona; a, b – odvěsny

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$	sinus = protilehlá ku přeponě
$\cos \alpha = \frac{b}{c}$	kosinus = řilehlá ku přeponě
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$	tangens = protilehlá ku řilehlé
$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$	kotangens = řilehlá ku protilehlé

Hodnoty pro dané řhly:

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\cos \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	neex.
$\operatorname{cotg} \alpha$	neex.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Přklady

1. Na břehu řeky je změřena vzdálenost $|AB| = 20 \text{ m}$ kolmá na směr AC . Z bodu B je vidět bod C na protějším břehu pod úhlem 65° . Jaká je vzdálenost bodů A, C ?
2. Vypočítejte
 - a. $\sin 60^\circ + 2 \cos 60^\circ - \cos 30^\circ$
 - b. $\cotg 30^\circ - \tg 60^\circ$
 - c. $\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ - \tg 45^\circ \cdot \cotg 45^\circ$
3. Lanovka má přímou trať délky 435 metrů a stoupá pod úhlem o velikosti 40° . Jaký je výškový rozdíl mezi horní a dolní stanicí?
4. Nakládací rampa o délce 12 metrů je na jednom konci o tři metry výše než na druhém konci. Jak velký úhel svírá rampa s vodorovnou rovinou?
5. Velikost úhlu sklonu elektrického vedení na svahu je 17° . Paty dvou sousedních stejně vysokých stožárů mají výškový rozdíl 16,4 m. Jak dlouhé jsou vodiče spojující sousední stožáry, je-li jejich skutečná délka o 1 % větší než skutečná vzdálenost vrcholů stožárů?
6. V pravoúhlém trojúhelníku je přepona dlouhá 9 cm a jedna odvěsna 7 cm. Vypočítejte vnitřní úhly a zbývající odvěsnu.

Řešení:

1. 43 m
2.
 - a. 1
 - b. 0
 - c. $-\frac{1}{2}$
3. 280 m
4. 14°
5. 56,8 m
6. 5,7 cm; $\alpha = 51^\circ$; $\beta = 39^\circ$

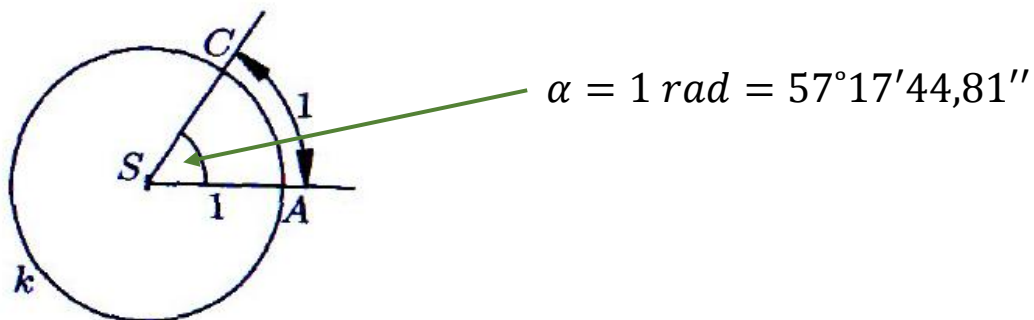
3.2 Stupňová a oblouková míra

– velikost úhlu měříme ve stupních ($^{\circ}$), minutách ($'$) a vteřinách ($''$)

$$- 1^{\circ} = 60' = 3600''$$

– velikost úhlu můžeme měřit i v radiánech (rad)

Jednotková kružnice (kružnice o poloměru 1)



$$360^{\circ} = 2\pi \text{ rad}$$

$$180^{\circ} = \pi \text{ rad}$$

Převodní vztahy:

$$\alpha = \frac{x \cdot 180}{\pi}$$

$$x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180}$$

Př.: Převeď stupně na radiány a naopak

a) $\frac{3}{10}\pi; 2\pi; \frac{7\pi}{15}; \frac{\pi}{2}; \frac{8\pi}{9}; \frac{\pi}{6}; \frac{12\pi}{5}$

b) $120^{\circ}; 30^{\circ}; 225^{\circ}; 1050^{\circ}; 45^{\circ}; 300^{\circ}; 1260^{\circ}; 60^{\circ}; 340^{\circ}; 924^{\circ}$

Př.: Vypočítej:

a) $-3\text{tg}\frac{\pi}{6} + 2\text{tg}\frac{\pi}{3}$

b) $\text{tg}\frac{\pi}{4} + \text{cotg}\frac{\pi}{4}$

c) $3\cos\frac{\pi}{4} - 3\sin\frac{\pi}{4} + 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\right)$

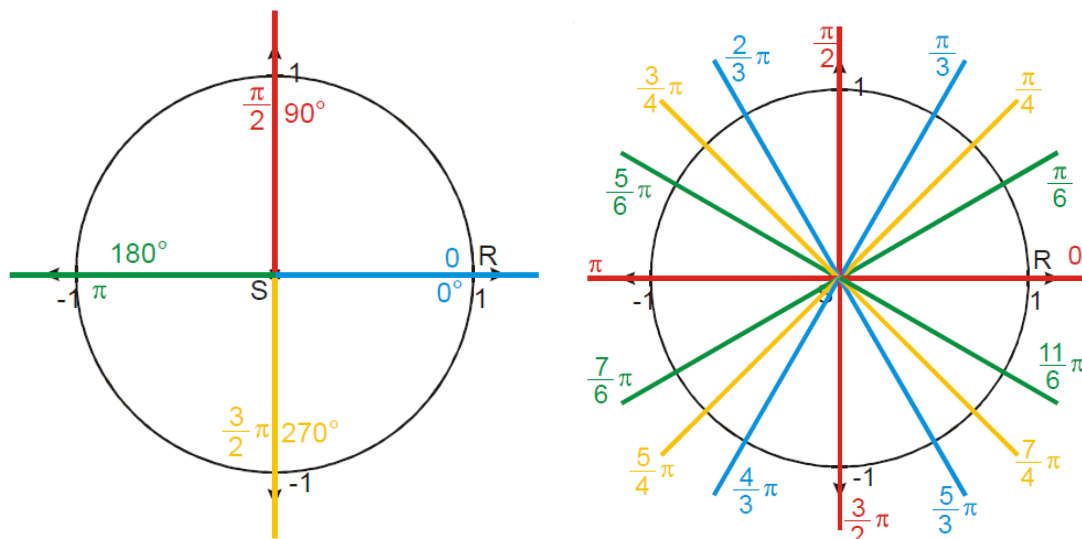
d) $\sin 45^{\circ} + \cos 30^{\circ}$

e) $\text{tg} 30^{\circ} - \sin 60^{\circ}$

f) $\cos 45^{\circ} + \text{cotg} 60^{\circ}$

g) $\cos 60^{\circ} + \sin\frac{\pi}{6}$

h) $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6} - \text{cotg}\frac{\pi}{3}$

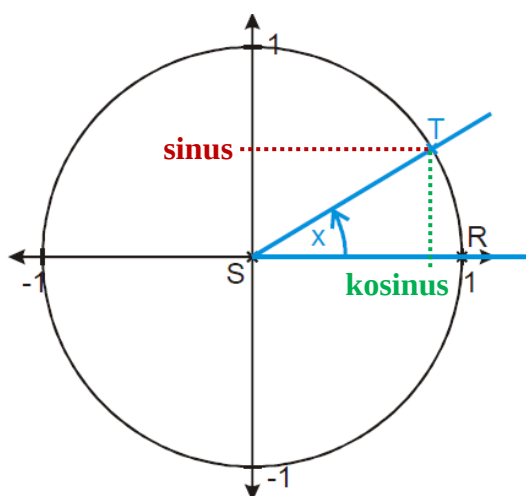


Úhel v základní velikosti – úhel, jehož velikost je v rozmezí $\langle 0; 360^\circ \rangle = \langle 0; 2\pi \rangle$

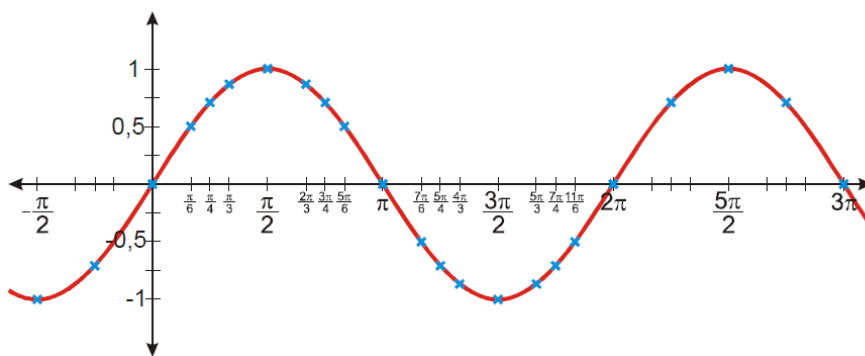
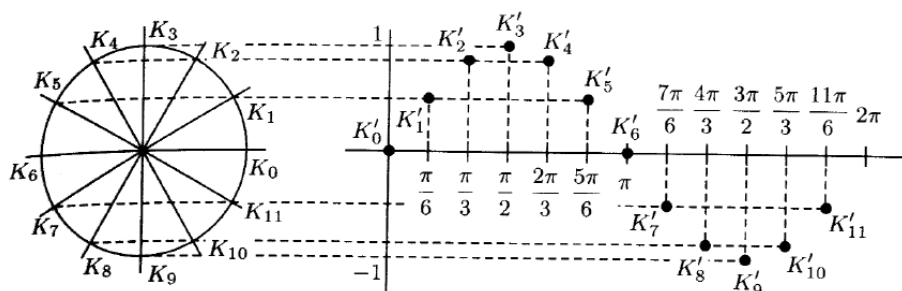
Př.: Na jednotkové kružnici vyznač následující úhly a převed' je do základní velikosti:

- a) $\frac{\pi}{6}; 2\pi; \frac{3\pi}{4}; \frac{11\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}$
- b) $45^\circ; 450^\circ; 390^\circ; 690^\circ; 1740^\circ; 2490^\circ$
- c) $\frac{13\pi}{6}; 3\pi; \frac{11\pi}{4}; \frac{9\pi}{2}; \frac{13\pi}{4}$

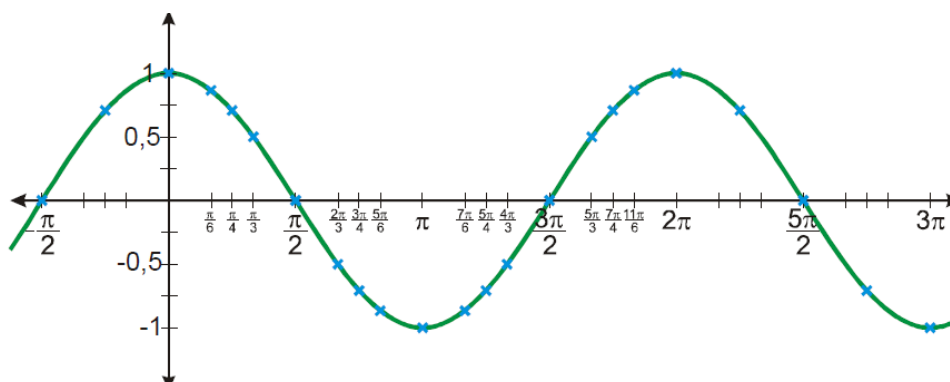
3.3 Goniometrické funkce sinus a kosinus

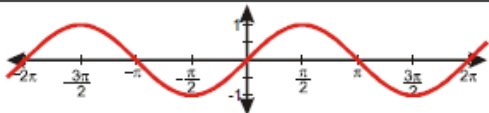


Funkce sinus:

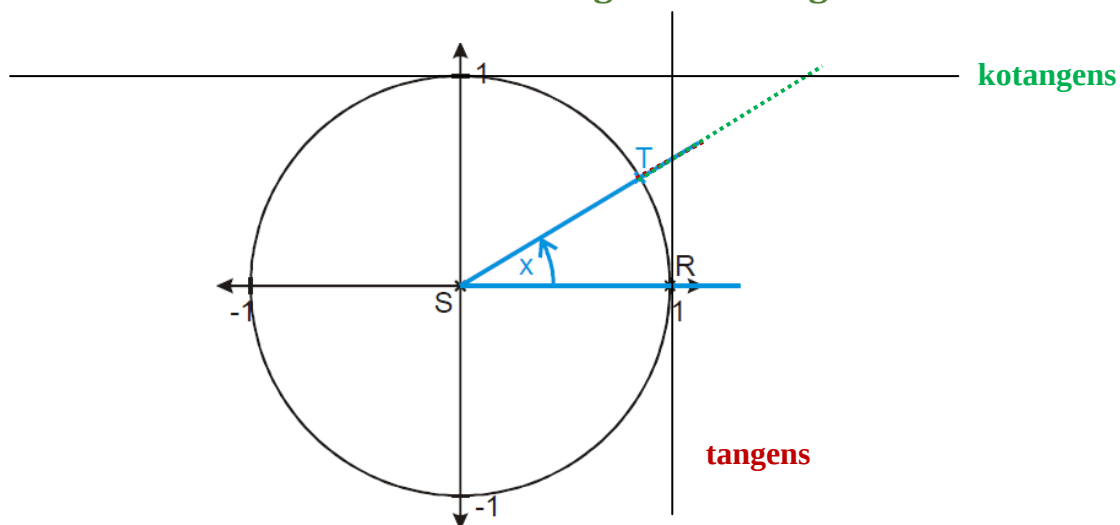


Funkce kosinus:



$y = \sin x$	$y = \cos x$
	
$D(f) = \mathbb{R}$	
periodická s nejmenší periodou 2π	
$H(f) = \langle -1; 1 \rangle$	
shora i zdola omezená	
maximum 1 v bodě $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$	maximum 1 v bodě $0 + k \cdot 2\pi$
minimum -1 v bodě $\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$	minimum -1 v bodě $\pi + k \cdot 2\pi$
lichá	sudá
rostoucí v $\left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)$	rostoucí v $(\pi + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi)$
klesající v $\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right)$	klesající v $(0 + k \cdot 2\pi; \pi + k \cdot 2\pi)$
kladné hodnoty pro $x \in (0 + k \cdot 2\pi; \pi + k \cdot 2\pi)$	kladné hodnoty pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)$
záporné hodnoty pro $x \in (\pi + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi)$	záporné hodnoty pro $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right)$

3.4 Goniometrické funkce tangens a kotangens



Funkce tangens a kotangens

$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{cotg} x$
$D(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$	$D(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{0 + k\pi\}$
periodická s nejmenší periodou π	periodická s nejmenší periodou π
$H(f) = \mathbb{R}$	$H(f) = \mathbb{R}$
není omezená	není omezená
nemá maximum ani minimum	nemá maximum ani minimum
lichá	lichá
rostoucí v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$	klesající v intervalu $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$

3.5 Základní goniometrické rovnice

Goniometrická rovnice v základním tvaru je každá rovnice, která lze zapsat ve tvaru:

$$\sin x = a; \cos x = a; \operatorname{tg} x = a; \operatorname{cotg} x = a$$

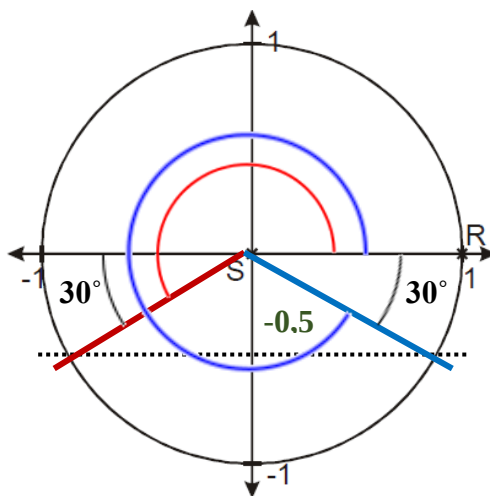
Základním řešením goniometrické rovnice je množina všech kořenů z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Vyřeř rovnici v R:

$$\sin x = -0,5$$

Postup:

1. Zakreslíme jednotkovou kružnici a vyznačíme na příslušné ose hodnotu z pravé strany rovnice
2. Z dané hodnoty vedeme kolmici na osu, která protne jednotkovou kružnici
3. V průsečících kolmice s jednotkovou kružnicí jsou koncové body ramen úhlů, které řeší danou rovnici
4. Zapiřeme základní řešení rovnice a přidáme ke každému úhlu příslušnou periodu (π nebo 2π).



Základní řešení:

$$x_1 = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

$$x_2 = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

Mnořina všech kořenů (přidáme periodu):

$$\underline{\underline{x_1 = 210^\circ + k \cdot 360^\circ; \quad x_2 = 330^\circ + k \cdot 360^\circ}}$$

Př.: Vyřeř rovnice v R

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$ $[x_1 = 120^\circ + k \cdot 360^\circ; x_2 = 240^\circ + k \cdot 360^\circ]$

b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $[x_1 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ; x_2 = 120^\circ + k \cdot 360^\circ]$

c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $[x_1 = 45^\circ + k \cdot 360^\circ; x_2 = 315^\circ + k \cdot 360^\circ]$

d) $\sin x = 3$ $[nemá řeření]$

e) $\cos x = -1$ $[x = 180^\circ + k \cdot 360^\circ]$

f) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $[x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ]$

g) $\operatorname{cotg} x = -1$ $[x_1 = 135^\circ + k \cdot 180^\circ]$

h) $\sin(2x) = 0,5$ $[x_1 = 15^\circ + k \cdot 180^\circ; x_2 = 75^\circ + k \cdot 180^\circ]$

i) $2\cos(x - 30^\circ) = 1$ $[x_1 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ; x_2 = 300^\circ + k \cdot 360^\circ]$

3.6 Goniometrické výrazy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Př.: Zjednoduř výrazy pro přípustné hodnoty proměnných

- | | | |
|----|---|-----------------------------------|
| a) | $\frac{\sin 2x}{4 \cos x}$ | $\left[\frac{\sin x}{2}\right]$ |
| b) | $(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2$ | $[2]$ |
| c) | $\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x$ | $\left[\frac{1}{\cos^2 x}\right]$ |
| d) | $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$ | $[\operatorname{tg}^2 x]$ |
| e) | $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$ | $[1 - \sin x]$ |
| f) | $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$ | $[1 + \sin x]$ |
| g) | $1 - \sin^2 x + \operatorname{cotg}^2 x \cdot \sin^2 x$ | $[2 \cos^2 x]$ |
| h) | $\frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos x - \cos^3 x}$ | $[\operatorname{cotg} x]$ |
| i) | $\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$ | $[\operatorname{cotg}^2 x]$ |
| j) | $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x}$ | $\left[\frac{1}{\cos^2 x}\right]$ |
| k) | $\cos 2x + \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x$ | $[1]$ |
| l) | $\frac{\cos^3 x - \cos x}{\sin^3 x - \sin x}$ | $[\operatorname{tg} x]$ |
| m) | $\frac{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$ | $[\operatorname{cotg} x]$ |
| n) | $\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}$ | $[2 \operatorname{tg} x]$ |
| o) | $\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$ | $[\operatorname{cotg} x]$ |

3.7 Trigonometrie

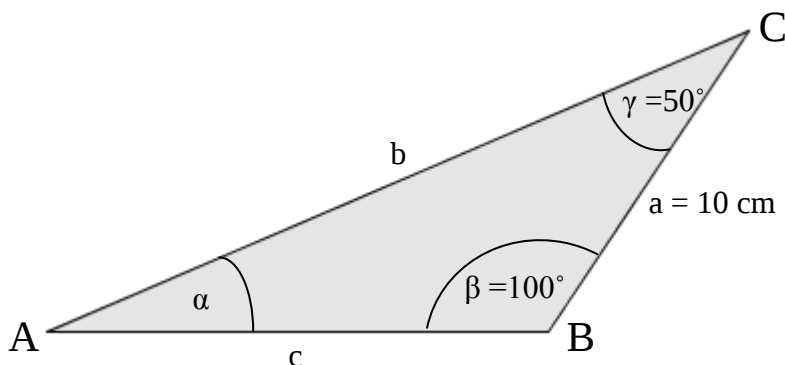
Řešení úloh o obecných trojúhelnících

3.7.1 Sinová věta

Pro každý trojúhelník ABC platí:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku ABC, je-li dáno: $a = 10 \text{ cm}$; $\beta = 100^\circ$ a $\gamma = 50^\circ$.



$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 100^\circ - 50^\circ = \underline{\underline{30^\circ}}$$

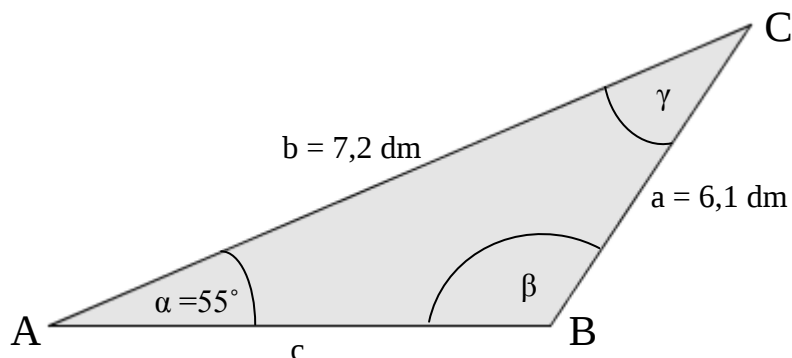
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 100^\circ} \quad / \cdot \sin 100^\circ$$

$$\frac{10}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 100^\circ = b$$

$$\underline{\underline{b = 19,7 \text{ cm}}}$$

Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku ABC, je-li dáno: $a = 6,1 \text{ dm}$; $b = 7,2 \text{ dm}$
 $\alpha = 55^\circ$.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{6,1}{\sin 55^\circ} = \frac{7,2}{\sin \beta} \quad / \cdot \sin \beta \cdot \sin 55^\circ$$

$$6,1 \cdot \sin \beta = 7,2 \cdot \sin 55^\circ \quad / : 6,1$$

$$\sin \beta = \frac{7,2 \cdot \sin 55^\circ}{6,1}$$

$$\sin \beta = 0,967$$

$$\underline{\underline{\beta = 75^\circ}}$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 55^\circ - 75^\circ = \underline{\underline{50^\circ}}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{6,1}{\sin 55^\circ} = \frac{c}{\sin 50^\circ} \quad / \cdot \sin 50^\circ$$

$$\frac{6,1}{\sin 55^\circ} \cdot \sin 50^\circ = c$$

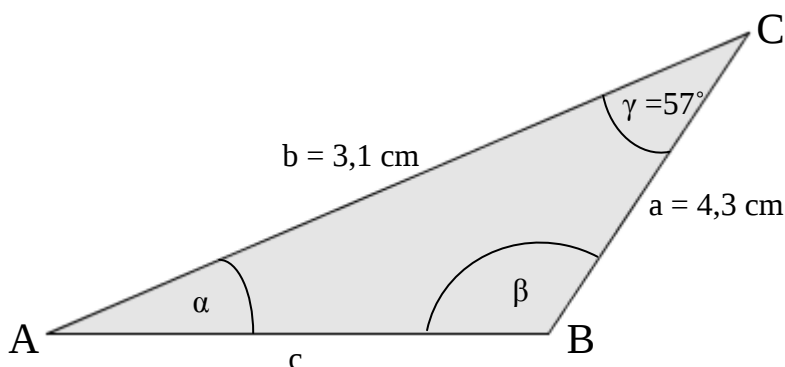
$$\underline{\underline{c = 5,7 \text{ dm}}}$$

Př.: Dopačítej zbylé strany a úhly v trojúhelníku ABC

- a) $a = 5 \text{ mm}$; $c = 0,8 \text{ cm}$ a $\alpha = 30^\circ$ [$\beta = 97^\circ$; $\gamma = 53^\circ$; $b = 10 \text{ mm}$]
- b) $b = 12 \text{ cm}$; $\alpha = 45^\circ$ a $\beta = 30^\circ$ [$\gamma = 105^\circ$; $a = 17 \text{ cm}$; $c = 3 \text{ cm}$]
- c) $b = 9 \text{ m}$; $c = 60 \text{ dm}$ a $\gamma = 80^\circ$ [nemá řešení]

3.7.2 Kosinová věta

Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku ABC, je-li dáno: $a = 4,3 \text{ cm}$; $b = 3,1 \text{ cm}$ a $\gamma = 57^\circ$.



Nelze použít sinovou větu.

Pro každý trojúhelník ABC platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$c^2 = 4,3^2 + 3,1^2 - 2 \cdot 4,3 \cdot 3,1 \cos 57^\circ$$

$$c^2 = 13,68$$

$$c = \sqrt{13,68}$$

$$\underline{\underline{c = 3,7 \text{ cm}}}$$

Dále již můžeme použít sinovou větu:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{4,3}{\sin \alpha} = \frac{3,7}{\sin 57^\circ} \quad / \cdot \sin \alpha \cdot \sin 57^\circ$$

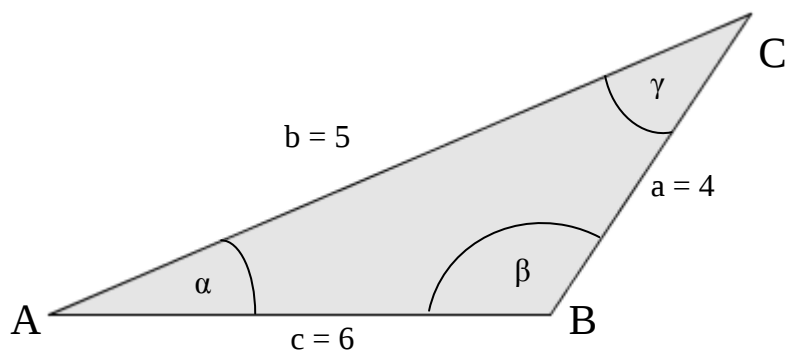
$$4,3 \cdot \sin 57^\circ = 3,7 \cdot \sin \alpha \quad / : 3,7$$

$$\sin \alpha = \frac{4,3 \cdot \sin 57^\circ}{3,7} = 0,975$$

$$\underline{\underline{\alpha = 77^\circ}}$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 77^\circ - 57^\circ = \underline{\underline{46^\circ}}$$

Trojúhelník ABC má délky stran 4, 5, 6. Urči velikosti jeho vnitřních úhlů.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos \gamma$$

$$36 = 16 + 25 - 40 \cos \gamma$$

$$-5 = -40 \cos \gamma \quad /: (-40)$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{8}$$

$$\underline{\underline{\gamma = 83^\circ}}$$

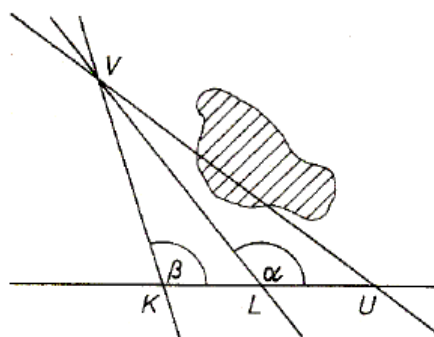
Př.: Dopočítej zbylé strany a úhly v trojúhelníku ABC

a) $a = 8; c = 6$ a $\beta = 45^\circ$ $[\alpha = 83^\circ; \gamma = 52^\circ; b = 5,7]$

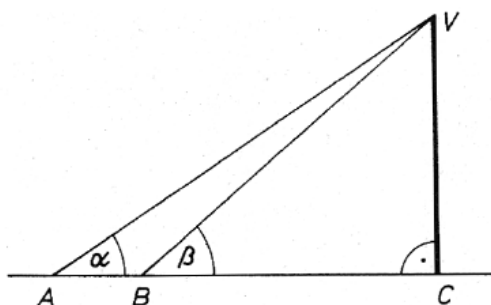
b) $a = 3; b = 4$ a $c = 5$ $[\alpha = 37^\circ; \beta = 53^\circ; \gamma = 90^\circ]$

Trigonometrie – příklady

- 1) Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno
 - a) $c = 20 \text{ cm}$; $\alpha = 45^\circ$ a $\beta = 105^\circ$
 - b) $a = 11,6 \text{ dm}$; $c = 9 \text{ dm}$ a $\alpha = 65^\circ 30'$
 - c) $a = 51,32 \text{ mm}$; $c = 34,76 \text{ mm}$ a $\alpha = 126^\circ 12'$
 - d) $a = 16,9 \text{ cm}$; $b = 26 \text{ cm}$ a $c = 27,3 \text{ cm}$
- 2) Pozorovatel je od jednoho konce předmětu vzdálený 5 m, od druhého 8 m a vidí ho pod zorným úhlem 60° . Jakou délku má předmět?
- 3) Určete vzdálenost míst U a V, které jsou oddělené rybníkem. Od U se proto vytyčila přímá trasa se stanovišti K a L, a naměřili se tyto údaje: $\alpha = 115^\circ 30'$; $\beta = 104^\circ 20'$; $|UK| = 110 \text{ m}$ a $|KL| = 65 \text{ m}$.



- 4) Cíl C pozorují ze dvou dělostřeleckých pozorovatelů A, B navzájem vzdálených 296 m. Přitom úhel $|\angle BAC| = 52^\circ 42'$ a úhel $|\angle ABC| = 44^\circ 56'$. Vypočítejte vzdálenost cíle od pozorovatelny A.
- 5) Jedna strana rovnoběžníka je $a = 15,45 \text{ m}$, jeho úhlopříčku $u = 4,253 \text{ m}$ a úhel proti ní ležící je $\alpha = 107^\circ 54'$. Vypočítejte velikost druhé strany a obou výšek.
- 6) Je třeba zjistit výšku věže. Bylo naměřeno: $\alpha = 34^\circ 30'$; $\beta = 41^\circ$. Vzdálenost míst A, B je 14 metrů.



- 7) Z pozorovatelny 15 m vysoké a vzdálené 30 m od břehu řeky se jeví šířka řeky v zorném úhlu 15° . Vypočítejte šířku řeky.
- 8) Vrchol věže stojící na rovině vidíme z určitého místa A ve výškovém úhlu $39^\circ 25'$. Přijdeme-li směrem k jeho patě o 50 m blíž na místo B, vidíme z něho vrchol věže ve výškovém úhlu $56^\circ 42'$. Jak vysoká je věž?

- 9) Po přímé cestě se přesouvá vojenská kolona. Pozorovatel na stanovišti A, které leží mimo cestu, zjistil že, vzdálenost místa A od čela U kolony je 14 350 m, vzdálenost A od konce V kolony je 13 840 m, $|\angle UAV| = 51^\circ$. Vypočítejte délku kolony.
- 10) Hlídce byl určen pochodový úhel o velikosti 13° , po 7 km byl změněn směr pochodu na úhel o velikosti 75° . Tímto směrem prošla hlídka dalších 8 km. Jaká je vzdálenost hlídky vzdušnou čarou od výchozího bodu?
- 11) Dvě přímé ulice se křižují v místě K v úhlu $\alpha = 51^\circ$. Místo A na jedné z těchto ulic, vzdálené 1 625 metrů od křižovatky K, má být spojeno nejkratší cestou s druhou ulicí. Jak dlouhá bude tato spojka?
- 12) Letadlo letí přímo k pozorovatelně ve výšce 2,5 km nad zemí. Při prvním měření bylo zaměřeno pod výškovým úhlem 28° , po třiceti sekundách pod výškovým úhlem 58° . Jakou rychlostí se letadlo pohybovalo?

Řešení:

- 1)
- a) $a = 28,3 \text{ cm}; b = 38,6 \text{ cm}; \gamma = 30^\circ$
- b) $b = 11,9 \text{ dm}; \beta = 69^\circ 35'; \gamma = 44^\circ 55'$
- c) $b = 22,4 \text{ mm}; \beta = 20^\circ 40'; \gamma = 33^\circ 8'$
- d) $\alpha = 36^\circ 52'; \beta = 67^\circ 22'; \gamma = 75^\circ 46'$
- 2) 7 m
- 3) 46 m
- 4) 211 m
- 5) $b = 2,629 \text{ m}; v_a = 2,503 \text{ m}; v_b = 14,708 \text{ m}$
- 6) 46 m
- 7) 43,3 m
- 8) $v = 89,4 \text{ m}$
- 9) 12,145 km
- 10) 13 km
- 11) 1263 m
- 12) $v = 348 \text{ km/h}$