

3.7 Geometrická posloupnost

Př. A: HDP (hrubý domácí produkt) České republiky dosáhl v roce 2011 hodnoty 505 tisíc Kč na jednoho obyvatele. Jaké hodnoty by dosáhl v roce 2018, pokud by rostl stálým tempem 3% ročně?

rok 2011 (HDP na začátku)...	$a_1 = 505 \text{ tisíc Kč}$
rok 2012...	$a_2 = 505 \cdot 1,03 \text{ tisíc Kč}$
rok 2013...	$a_3 = (505 \cdot 1,03) \cdot 1,03 = 505 \cdot 1,03^2 \text{ tisíc Kč}$
rok 2014 ...	$a_4 = (505 \cdot 1,03^2) \cdot 1,03 = 505 \cdot 1,03^3 \text{ tisíc Kč}$
rok 2015 ...	$a_5 = (505 \cdot 1,03^3) \cdot 1,03 = 505 \cdot 1,03^4 \text{ tisíc Kč}$
rok 2018...	$a_8 = (505 \cdot 1,03^6) \cdot 1,03 = 505 \cdot 1,03^7 \text{ tisíc Kč}$
	<u>$a_8 = 621 \text{ tisíc Kč}$</u>

Př. B: V roce 2011 se v České Republice narodilo 109 tisíc novorozeňat. Tento počet se stále zmenřuje. Kolik dětí se narodí v roce 2018, pokud se jejich počet zmenřuje každý rok přibližně o 2 %?

v roce 2011 (počet na začátku)...	$a_1 = 109 \text{ tisíc dětí}$
v roce 2012 ...	$a_2 = 109 \cdot 0,98 \text{ tisíc dětí}$
v roce 2013 ...	$a_3 = (109 \cdot 0,98) \cdot 0,98 = 109 \cdot 0,98^2 \text{ tisíc dětí}$
v roce 2014 ...	$a_4 = (109 \cdot 0,98^2) \cdot 0,98 = 109 \cdot 0,98^3 \text{ tisíc dětí}$
v roce 2015 ...	$a_5 = (109 \cdot 0,98^3) \cdot 0,98 = 109 \cdot 0,98^4 \text{ tisíc dětí}$
v roce 2018 ...	$a_8 = (109 \cdot 0,98^6) \cdot 0,98 = 109 \cdot 0,98^7 \text{ tisíc dětí}$
	<u>$a_8 = 95 \text{ tisíc dětí}$</u>

Jaká je společná vlastnost obou posloupností?

- každý další člen posloupnosti získáme vynásobením předchozího stále stejným číslem
- podíl dvou sousedních členů je stále stejný (konstantní)

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá geometrická, právě když existuje takové číslo q , že pro každé přirozené číslo n platí $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Číslo q se nazývá kvocient posloupnosti: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Př. 1: Je dána geometrická posloupnost, urči údaje dle zadání:

- a) 2; 4; 8; 16; 32 ... $q = ?$ [$q = 2$]
- b) 999; 333; 111; 37 ... $q = ?$ [$q = \frac{1}{3}$]
- c) $a_1 = -5$; $q = -2$ $a_4 = ?$ [$a_4 = 40$]
- d) $a_1 = 6$; $q = 0,5$ $a_3 = ?$ [$a_3 = 1,5$]
- e) $a_5 = 81$; $q = 3$ $a_1 = ?$ [$a_1 = 1$]
- f) $a_1 = 2$; $q = 2$ $a_{10} = ?$ [$a_{10} = 1024$]

Vzorec pro určení n-tého členu pomocí a_1 : $a_n = a_1 q^{n-1}$

Př. 2: Urči v geometrické posloupnosti údaj dle zadání:

- a) $a_1 = -1$; $q = -3$ $a_{12} = ?$ [$a_{20} = 177\,147$]
- b) $a_{15} = 11$; $q = -1$ $a_1 = ?$ [$a_1 = -11$]
- c) $a_1 = 36$; $a_6 = 1,125$ $q = ?$ [$q = \frac{1}{2}$]
- d) $a_{10} = 19\,683$; $q = -3$ $a_5 = ?$ [$a_5 = -81$]

Vzorec pro určení s-tého členu pomocí a_r : $a_s = a_r q^{s-r}$

Př. 3: Urči v geometrické posloupnosti údaj dle zadání:

- a) $a_{10} = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{4}$ $a_4 = ?$ [$a_4 = 2048$]
- b) $a_7 = 128$; $a_{12} = -4096$ $q = ?$ [$q = -2$]

Př. 4: V geometrické posloupnosti je $a_1 = 2$; $q = 5$. Který člen posloupnosti je roven číslu 31 250? [a_7]

Př. 5: V geometrické posloupnosti je dáno $a_4 = 24$ a $a_{11} = 3072$. Urči q , a_1 a a_8 .
[$q = 2$; $a_1 = 3$; $a_8 = 384$]

Př. 6: Urči první člen a kvocient geometrické posloupnosti, kde je dáno:
 $a_1 + a_2 - a_4 = -110$; $a_2 + a_3 - a_5 = -220$ [$a_1 = 22$; $q = 2$]

Př.: Sbírka str. 284/47-52