

2.7 Logaritmické rovnice

2.7.1 LR s jediným logaritmem

Řeř rovnici v R:

$$\log_2(2x - 6) = 3$$

$$2x - 6 = 2^3$$

$$2x = 14$$

$$\underline{x = 7}$$

$$\text{Pod.: } 2x - 5 > 0$$

$$x > 3 \quad \underline{K = \{7\}}$$

$\Rightarrow$ pokud je v rovnici pouze jeden logaritmus, řeříme dle definice logaritmu

Řeř rovnici v R:

$$4 \cdot \log_3(2x - 1) = 12 \quad /:4$$

$$\log_3(2x - 1) = 3$$

$$2x - 1 = 27$$

$$\underline{x = 14}$$

$$\text{Pod.: } 2x - 1 > 0$$

$$x > \frac{1}{2} \quad \underline{K = \{14\}}$$

$\Rightarrow$ pokud je v rovnici s jediným logaritmem před tímto logaritmem konstanta, převedeme ji na druhou stranu rovnice

Př.: Zapiř jediným logaritmem a zjednoduř:

$$\text{a) } 5\log_6(x - 2) = 10 \quad [38; \text{pod.: } x > 2]$$

$$\text{b) } 2\log(12 - x) = 6 \quad [-988; \text{pod.: } x < 12]$$

$$\text{c) } 3\log_2\left(3x + \frac{5}{2}\right) = -3 \quad \left[-\frac{2}{3}; \text{pod.: } x > -\frac{5}{6}\right]$$

2.7.2 LR s více logaritmy

Řeř rovníci v R:

$$\log\left(\frac{1}{3} - x\right) = \log x - \log 2$$

⇒ pokud jsou v rovnici jen logaritmy, na každé straně „vyrobíme“ pouze jeden logaritmus:

$$\log\left(\frac{1}{3} - x\right) = \log \frac{x}{2}$$

⇒ porovnáme argumenty obou logaritmů:

$$\frac{1}{3} - x = \frac{x}{2}$$

$$2 - 6x = 3x$$

$$-9x = -2$$

$$x = \frac{2}{9}$$

$$\text{Pod.: } \frac{1}{3} - x > 0 \wedge x > 0$$

$$x < \frac{1}{3} \wedge x > 0$$

$$x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$$

$$K = \left\{\frac{2}{9}\right\}$$

=====

Řeš rovnici v R:

$$\log_4(3x + 2) - 2 \log_4 x = 2 - \log_4 8$$

⇒ pokud je v rovnici i samotná konstanta (číslo):

1. možnost: převedeme všechny logaritmy na jednu stranu rovnice:

$$\log_4(3x + 2) - 2 \log_4 x + \log_4 8 = 2$$

⇒ spojíme logaritmy do jednoho dle vět o logaritmech:

$$\log_4 \frac{3x + 2}{x^2} + \log_4 8 = 2$$

$$\log_4 \left(\frac{3x + 2}{x^2} \cdot 8 \right) = 2$$

$$\log_4 \left(\frac{24x + 16}{x^2} \right) = 2$$

$$\frac{24x + 16}{x^2} = 4^2$$

$$24x + 16 = 16x^2$$

$$16x^2 - 24x - 16 = 0 \quad / : 8$$

$$\underline{2x^2 - 3x - 2 = 0}$$

$$a = 2; b = -3; c = -2$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Pod.: } 3x + 2 > 0 \wedge x > 0$$

$$x > -\frac{2}{3} \wedge x > 0$$

$$\underline{x \in (0; \infty)}$$

$$\underline{K = \{2\}}$$

2. možnost: z konstanty vytvoříme logaritmus se stejným základem:

$$\log_4(3x + 2) - 2\log_4 x = \log_4 16 - \log_4 8$$

⇒ spojíme logaritmy na každé straně rovnice do jednoho a porovnáme argumenty:

$$\log_4 \frac{3x + 2}{x^2} = \log_4 \left(\frac{16}{8} \right)$$

$$\frac{3x + 2}{x^2} = 2$$

$$3x + 2 = 2x^2$$

$$\underline{2x^2 - 3x - 2 = 0}$$

viz předchozí možnost řešení

Př.: Vyřeř rovnici v R:

$$\text{a) } 2\log_5 x = 4 - \log_5 \frac{x}{25} \quad [25; \text{pod.: } x > 0]$$

$$\text{b) } 2 \log x = \log(x + 6) \quad [3; \text{pod.: } x > -6]$$

$$\text{c) } \log_2(x - 1) + \log_2(1 + x) = \frac{2 \log_2(x-3)}{\log_2 2} \quad [\emptyset; \text{pod.: } x > 3]$$

$$\text{d) } \log_3(2x - 1) = 2 \log_3 4 - 3 \log_3 2 \quad \left[\frac{3}{2}; \text{pod.: } x > \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{e) } \log_3(x - 1) + \log_3(x + 1) = 1 \quad [2; \text{pod.: } x > 1]$$

$$\text{f) } \frac{\log x}{\log(5x-3)} = 1 \quad \left[0,75; \text{pod.: } x > \frac{3}{5} \right]$$

$$\text{g) } \frac{\log_4 x - 1}{0,5 + \log_4 3} = 1 \quad [7; \text{pod.: } x > 0]$$

2.7.3 LR řešené substitucí

Řeř rovníci v R:

$$\log_2^2 x + 2 \log_2 x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \log_2^2 x = (\log_2 x)^2$$

$\Rightarrow$ pokud je v rovnici mocnina logaritmu použijeme tzv. substituci (záměna) a přepíšeme původní rovnici:

$$\text{sub: } \log_2 x = y$$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$a = 1; b = 2; c = -3$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$y_1 = 1, y_2 = -3$$

$\Rightarrow$ výsledky kvadratické rovnice dosadíme zpátky do substituce

$$\log_2 x = 1$$

$$x = 2^1$$

$$x = 2$$

$$\log_2 x = -3$$

$$x = 2^{-3}$$

$$x = \frac{1}{8}$$

$$\text{Pod.: } x > 0$$

$$K = \left\{ \frac{1}{8}; 2 \right\}$$

Př.: Vyřeř rovníci v R:

$$\text{a) } \frac{3}{\log x} + \log x = 4$$

$$[10; 1000; \text{pod.: } x > 0]$$

$$\text{b) } \log^2 x + 6 \log x + 9 = 0$$

$$[0,001; \text{pod.: } x > 0]$$

$$\text{c) } \log x - \frac{16}{\log x} = -6$$

$$[10^{-8}; 100; \text{pod.: } x > 0]$$

2.7.4 ER řešené logaritmováním

Řeř rovníci v R:

$$2^{x-5} = 3$$

⇒ nelze převést na stejný základ

⇒ zlogaritmujeme obě strany rovnice:

$$\log 2^{x-5} = \log 3$$

$$(x - 5) \log 2 = \log 3$$

$$x - 5 = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 2} + 5$$

$$x = 6,58$$

$$\underline{\underline{K = \{6,58\}}}$$

Př.: Vyřeř rovníci v R:

a) $6^{2x-1} = 5$

$$\left[\frac{\log_6 5 + 1}{2} \doteq 0,95 \right]$$

b) $2^{5x-3} = 3^{3x-2}$

$$\left[\frac{3 \log 2 - 2 \log 3}{5 \log 2 - 3 \log 3} \doteq -0,69 \right]$$

c) $4^{x-2} = 5 \cdot 3^{x-2}$

$$\left[\frac{\log 5 - 2 \log 3 + 2 \log 4}{\log 4 - \log 3} \doteq 7,59 \right]$$