

2.6 Věty o logaritmech

- konec 16. století: rozvoj mořeplavby, obchodu a konstruování → velká potřeba rychlého počítání
 - problémy s násobením (násobení čtyřmístných čísel je docela problém), dělením, umocňováním a odmocňováním
- počátek 17. století: objev logaritmů

Chceme (bez kalkulačky) spočítat kolik je $4 \cdot 16 = 64$

Můžeme ho získat i jinak (násobíme mocniny 2): $4 \cdot 16 = 2^2 \cdot 2^4 = 2^6 = 64$

Tabulka:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = 2^x$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Výsledek násobení čísel v 2. řádku tabulky, jsme získali sčítáním čísel v jejím 1. řádku.

Chceme (bez kalkulačky) spočítat kolik je $64 \cdot 16 = 1024$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = 2^x$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

$$16 \cdot 64 = 1024$$

$$4 + 6 = 10$$

$$\log_2 16 + \log_2 64 = \log_2 1024 = \log_2 (16 \cdot 64)$$

S tabulkou a předchozím postřehem:

- násobení můžeme převádět na sčítání (k číslům z druhého řádku, která chceme vynásobit, najdeme čísla v prvním řádku, která sečteme, a pod jejich součtem objevíme výsledek násobení)

⇒ mohli bychom si tím ulehčit násobení (v dnešní době kalkulaček a počítačů to nemá cenu)

⇒ pomůcka, která tuto vlastnost logaritmů využívala, se nazývá **logaritmické pravítko**

Pro každé $a > 0, a \neq 1$ a pro všechna $r, s > 0$ platí:

$$\log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$$

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$$

$$s \cdot \log_a r^s = s \cdot \log_a r$$

$$s \neq 1: \quad \log_s r = \frac{\log_a r}{\log_a s}$$

Zapiř jediným logaritmem a zjednoduř:

$$\log_4 8 + \log_4 2 = \log_4(8 \cdot 2) = \log_4 16$$

$$16 = 4^x$$

$$4^2 = 4^x$$

$$x = 2$$

$$\underline{\underline{\log_4 16 = 2}}$$

Zapiř jediným logaritmem a zjednoduř:

$$\log_3 30 - \log_3 5 - \log_3 2 = \log_3 \frac{30}{5 \cdot 2} = \log_3 \frac{6}{2} = \log_3 3$$

$$3 = 3^x$$

$$x = 1$$

$$\underline{\underline{\log_3 3 = 1}}$$

Př.: Zapiř jediným logaritmem a zjednoduř:

- a) $\log_6 4 + \log_6 9$ [2]
- b) $\log_{0,1} 25 + \log_{0,1} 4$ [-2]
- c) $\log_2 12 - \log_2 3$ [2]
- d) $\log_3 2 - \log_3 6$ [-1]
- e) $\log_2 30 - \log_2 5 + \log_2 3 - \log_2 9$ [1]
- f) $\log_{0,2} 8 - \log_{0,2} 100 + \log_{0,2} 0,5$ [2]
- g) $\log_5 90 - 2 \log_5 3 - \log_5 2$ [1]
- h) $3 \log_3 2 - \log_3 24$ [-1]

Př.: Zapiř jediným logaritmem a urči podmínky:

- a) $2 \log_6 a + \log_6 b$ $[\log_6(a^2 b); a, b > 0]$
- b) $\log u - \log 3 - 2 \log v$ $\left[\log \frac{u}{3v^2}; u, v > 0\right]$
- c) $3 \log c + 2 \log d - \frac{1}{2} \log c$ $\left[\log \frac{3c}{d^2 \sqrt{c}}; c, d > 0\right]$
- d) $\log_3 x - \log_3 y + \frac{2}{3} \log x - \log(x + y)$ $\left[\log_3 \frac{\sqrt[3]{x^5}}{y(x+y)}; x, y > 0\right]$

Zlogaritmuj výraz a urči podmínky:

$$\frac{6x^2}{y}$$

$$\log \frac{6x^2}{y} = \log 6x^2 - \log y = \log 6 + \log x^2 - \log y = \log 6 + 2 \log x - \log y$$

$$\text{Pod.: } x > 0; y > 0$$

Př.: Zlogaritmuj výraz a urči podmínky:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a) $\frac{a^3 \cdot 5}{\sqrt{b}}$ | $\left[3 \log a + \log 5 - \frac{1}{2} \log b \right]$ |
| b) $\frac{1}{2r}$ | $[\log 1 - \log 2 - \log r]$ |
| c) $3xy^{-2}$ | $[\log 3 + \log x - 2 \log y]$ |
| d) $m^4 \sqrt[n]{n+1}$ | $\left[\log m + \frac{1}{4} \log(n+1) \right]$ |