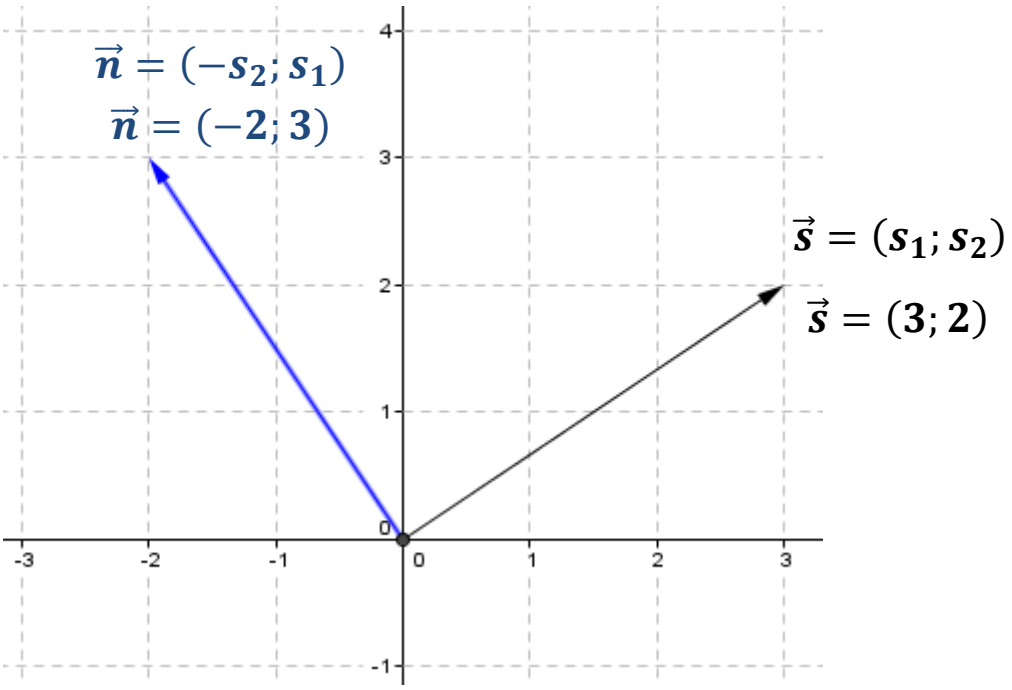
2.6.3 Obecná rovnice přímky

Vektor kolmý ke směrovému vektoru přímky nazýváme normálový. Pokud má směrový vektor souřadnice $\vec{s} = (s_1; s_2)$ pak normálový vektor má souřadnice $\vec{n} = (-s_2; s_1)$.



Př.: Urči souřadnice normálového vektoru přímky, je-li dáno:

a) $\vec{s} = (6; 7)$ $[\vec{n} = (-7; 6)]$

b) $\vec{s} = (-1; 2)$ $[\vec{n} = (-2; -1)]$

c) $\vec{s} = (0; -5)$ $[\vec{n} = (5; 0)]$

d) $p = \leftrightarrow AB,\ A[-1; 1], B[2; -3]$ $[\vec{n} = (4; 3)]$

e) $q = \leftrightarrow RS,\ S[-4; -3], R[-1; 6]$ $[\vec{n} = (-9; 3)]$

Mějme bod $A[a_1; a_2]$ a vektor $\vec{n} = (a; b)$, který je kolmý na přímku p, pak obecnou rovnici přímky p definujeme jako:

$$ax + by + c = 0$$

kde x, y jsou souřadnice libovolného bodu na přímce a vektor $\vec{n}$ nazýváme normálový.

– dvě obecné rovnice určují stejnou přímku právě tehdy, když jedna z nich je násobkem druhé.

– dvě přímky jsou rovnoběžné právě tehdy, když normálový vektor jedné je násobkem normálového vektoru druhé přímky.

Urči obecnou rovnici přímky procházející body A[1; 3] a B[4; −2].

$$ax + by + c = 0$$

Postup:

1. Určíme směrový vektor přímky ↔ AB: $\vec{s} = (s_1; s_2)$
2. Určíme normálový vektor přímky ↔ AB: $\vec{n} = (-s_2; s_1)$ – máme koeficienty *a*, *b* do obecné rovnice
3. Do obecné rovnice dosadíme souřadnice jednoho z bodů, které na přímce leží (A, B) a určíme poslední koeficient *c* v rovnici

1. $\vec{s} = B - A = (4 - 1; -2 - 3)$

   $\vec{s} = (3; -5)$

2. $\vec{n} = (-s_2; s_1)$

   $\vec{n} = (5; 3) \quad \rightarrow \quad 5x + 3y + c = 0$

3. $5x + 3y + c = 0 \quad \rightarrow \quad A \in p: 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + c = 0$

$$5 + 9 + c = 0$$

$$c = -14 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{5x + 3y - 14 = 0}}$$

Př.: Urči obecnou rovnici přímky, je-li dáno:

a) $p =\leftrightarrow AB; A[3; -2]$ a $B[-1; 4]$ $\quad [p: 3x + 2y - 5 = 0]$

b) $q =\leftrightarrow CD; C[-5; 1]\ a\, D[0; 6]$ $\quad [q: x - y + 6 = 0]$

Urči obecnou rovnici přímky p, která má parametrické vyjádření p: $x = 4 - 2t;\ y = 1 + 4t,\ t \in R$.

ze soustavy rovnic odstraníme parametr t:

$$x = 4 - 2t \qquad /\cdot 2$$

$$\underline{y = 1 + 4t}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 8 - 4t \\ \underline{y} &\underline{= 1 + 4t} \end{aligned}\right\} +$$

$$\underline{\underline{p: 2x + y - 9 = 0}}$$

Př.: Urči obecnou rovnici přímky, je-li dáno:

a. $u: x = 3 - t;\ y = 5 + 2t, t \in R$ $\quad [u: 2x + y + 11 = 0]$

b. $v: x = -2t;\ y = 6 + 3t, t \in R$ $\quad [p: 3x + 2y - 12 = 0]$

Napiš parametrické vyjádření přímky p: $4x - y + 2 = 0$

Postup:

1. Určíme normálový vektor přímky $\vec{n} = (a; b)$
2. Určíme směrový vektor přímky $\vec{s} = (-b; a)$
3. Najdeme bod na přímce (jednu souřadnici určíme a druhou dopočítáme)
4. Zapíšeme parametrické vyjádření přímky

1. $\vec{n} = (a; b) = (4; -1)$
2. $\vec{s} = (-b; a) = (1; 4)$
3. $A[0; y] \in p$: $4x - y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 4 \cdot 0 - y + 2 = 0$

   $y = 2 \quad \rightarrow \quad A[0; 2]$
4. $\underline{\underline{p: x = t;\ y = 2 + 4t, t \in R.}}$

Př.: Urči parametrické vyjádření přímky:

a. $u: 2x + y - 1 = 0$ $[u: x = 1 + t;\ y = -1 - 2t, t \in R]$

b. $v: x - 3 = 0$ $[v: x = 3;\ y = t, t \in R]$

Obecná rovnice přímky – příklady

1. Urči obecnou rovnici přímky p s normálovým vektorem $\vec{n}$, která obsahuje bod A, pokud je:
   a. $A[1;-2]; \vec{n} = (3;-1)$
   b. $A[0;5]; \vec{n} = (-2;4)$
2. Parametrické vyjádření přímky převeď na obecnou a naopak:
   a. $p: x = 1 - t;\ y = 3 + 4t, t \in R$
   b. $q: x = 3 - t;\ y = 2, t \in R$
   c. $k: x + 2y - 5 = 0$
3. Urči obecnou rovnici přímky, pro kterou platí:
   a. $K \in k; K[2;3]$ a $k \parallel l$, kde $l: x - 3y + 2 = 0$
   b. $P \in p; P[1;3]$ a $p \parallel q$, kde $q: 2x + y - 1 = 0$
4. Urči vzájemnou polohu přímek:
   a. $p: 2x - y + 1 = 0; q: 3x + 2 = 0$
   b. $p: -x + y = 0; q: 2x - 2y = 0$
   c. $p: 3x - y + 1 = 0; q: 6x - 2y + 1 = 0$
5. Urči obecnou rovnici přímky, která prochází bodem Q a je kolmá k přímce p:
   a. $Q[1;-3]; p: -x + 3y - 2 = 0$
   b. $Q[2;5]; p: x = 2 + 3t;\ y = -t, t \in R$
6. Napište obecnou rovnici přímky:
   a. která prochází bodem $A[2;1]$ a je kolmá k vektoru $\vec{n} = (7;2)$
   b. která prochází bodem $A[3;-2]$ a je rovnoběžná s osou y
   c. jestliže přímka je dána parametrickým vyjádřením $c: x = -3 + 5t;\ y = 1 - 4t, t \in R$
   d. je-li přímka dána body $A[-3;7]$ a $B[5;-2]$
   e. která je kolmá k přímce $q: 3x - 2y + 2 = 0$ a prochází bodem $A[4;-1]$

Řešení:

1.
   a. $p: 3x - y - 5 = 0$
   b. $p: x - 2y + 10 = 0$
2.
   a. $p: 4x + y - 7 = 0$
   b. $q: y - 2 = 0$
   c. $k: x = t;\ y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}t, t \in R$
3.
   a. $l: x - 3y + 7 = 0$
   b. $p: 2x + y - 5 = 0$
4.
   a. různoběžky, kde $P\left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right]$
   b. $p = q$
   c. rovnoběžky
5.
   a. $q: 3x + y = 0$
   b. $q: 3x - y - 1 = 0$
6.
   a. $a: 7x + 2y - 16 = 0$
   b. $b: y + 2 = 0$
   c. $c: 4x + 5y + 7 = 0$
   d. $d: 9x + 8y - 29 = 0$
   e. $e: 2x + 3y - 5 = 0$