2.6 Přímka v rovině

2.6.1 Parametrické vyjádření přímky

Každou přímku lze zadat pomocí bodu a směru (vektoru).

Mějme bod $A[a_1; a_2]$ a vektor $\vec{s} = (s_1; s_2)$. Parametrické vyjádření (parametrickou rovnici) přímky p definujeme jako:

$$x = a_1 + t \cdot s_1$$

$$y = a_2 + t \cdot s_2,\ t \in R$$

Schematicky lze přímku vyjádřit jako: $X = A + t \cdot \vec{s}$

Každé hodnotě parametru t odpovídá jeden bod přímky. Vektor $\vec{s}$ se nazývá směrový vektor přímky (takový nenulový vektor, který je s danou přímkou rovnoběžný – má stejný směr).

$t \in R$ – přímka, $t \in \langle 0; 1\rangle$ – úsečka, $t \in \langle 0; \infty)$ – polopřímka.

Napiš parametrické vyjádření přímky p, na které leží body $A[5; 3]$ a $B[-1; 6]$:

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (-6; 3)$$

$$\text{p:}\quad x = a_1 + t \cdot s_1$$

$$y = a_2 + t \cdot s_2,\ t \in R$$

$$\text{p:}\quad x = 5 - 6t$$

$$y = -1 + 3t,\ t \in R$$

Př.: Napiš parametrické vyjádření přímky p, ve které je dáno:

a) $\vec{s} = (-2; 1), A[3; 5]$ $[x = 3 - 2t; y = 5 + t]$

b) $\vec{s} = (0; 4), A[-2; 5]$ $[x = -2; y = 5 + 4t]$

c) $R[0; 7], S[-3; -2]$ $[x = -3t; y = 7 - 2t]$

d) $U[8; -2], V[10; 15]$ $[x = 8 + 2t; y = -2 + 17t]$

Př.: Urči směrový vektor přímky p, která je zadána parametricky:

a) $p: x = 5 - 8t; y = -1 + 2t$ $[\vec{s} = (-8; 2)]$

b) $p: x = 2{,}5 + t; y = 7{,}5 - 1{,}5t$ $[\vec{s} = (1; -1{,}5)]$

c) $p: x = -t; y = 3$ $[\vec{s} = (-1; 0)]$

Zjisti, zda body $P[1;2]$ a $Q[3;1]$ leží na přímce p, která má parametrické vyjádření

$$p: \quad x = 2 - t, \quad y = 3 + 2t,\ t \in R$$

$$P: \quad \left.\begin{array}{lll} 1 = 2 - t & \rightarrow & t = 1 \\ 2 = 3 + 2t,\ t \in R & \rightarrow & t = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \underline{\underline{P \notin p}}$$

$$Q: \quad \left.\begin{array}{lll} 3 = 2 - t & \rightarrow & t = -1 \\ 1 = 3 + 2t,\ t \in R & \rightarrow & t = -1 \end{array}\right\} \underline{\underline{Q \in p}}$$

Př.: Zjisti, zda body $U[-2;6]$ a $V[8;0]$ leží na přímce a: $x = -16 + 7t;\ y = 18 - 6t$, $t \in R$. $[U \in a; V \notin a]$

2.6.2 Vzájemná poloha přímek zadaných parametricky

Přímky mohou být rovnoběžné (totožné či různé) nebo různoběžné (průsečík).

Jsou dány přímky $p(A;\vec{u})$ a $q(Q;\vec{v})$, kde $A[4;0]$, $\vec{u} = (1;-1)$, $B[-1;2]$ a $\vec{v} = (2;1)$.

Zjisti vzájemnou polohu těchto přímek.

Napíšeme příslušné parametrické rovnice obou přímek:

$$p: \quad x = 4 + t, \quad y = -t,\ t \in R \qquad\qquad q: \quad x = -1 + 2r, \quad y = 2 + r,\ r \in R$$

Hledáme společné body obou přímek → řešíme soustavu rovnic

$$p \cap q: \quad \begin{array}{l} 4 + t = -1 + 2r \\ \underline{-t = 2 + r} \\ t = -2 - r \end{array}$$

$$4 + (-2 - r) = -1 + 2r$$

$$-3r = -3$$

$$r = 1$$

dosadíme *parametr* (r) do odpovídající rovnice

$$x = -1 + 2 = 1$$

$$y = 2 + 1 = 3$$

$$\underline{\underline{P[1;3]}}$$

Přímky jsou různoběžné, protože mají společný bod $P[1;3]$.

Př.: Urči vzájemnou polohu přímek (případně souřadnice průsečíku)

a) $p: x = 1 + 2t; y = 2 - 3t$
$q: x = -r; y = 1 + 1{,}5r$ $[p \parallel q\ (\text{různé})]$

b) $p(P, \vec{u}): P[3; 2], \vec{u} = (2; -1)$
$q: x = -1 + r; y = 1 + r$ $\left[p \nparallel q,\ R[1; 3]\right]$

c) $p(P, \vec{u}): P\left[\frac{3}{2}; 1\right], \vec{u} = (-1; 2)$
$q(Q, \vec{v}): Q[-1; 6], \vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -1\right)$ $[p = q]$

Parametrické vyjádření přímky – příklady

1. Napište parametrické vyjádření přímky p dané:
   a. bodem $A[1;-2]$ a vektorem $\vec{u}=(-3;4)$ s ní rovnoběžným
   b. body $A[5;3]$ a $B[7;4]$
   c. která prochází bodem $A[2;6]$ a je rovnoběžná s přímku $\overleftrightarrow{BC}$, kde $B[3;7]$ a $C[-4;8]$
2. Jsou dány body $A[2;4]$, $B[3;5]$ a $C[7;1]$. Napište parametrické rovnice přímky p:
   a. $A \in p, p \parallel \overleftrightarrow{BC}$
   b. $p = \leftrightarrow AB$
   c. $A \in p$, p je rovnoběžná s osou x
   d. $B \in p$, p je rovnoběžná s osou y
3. Jsou dány body $A[-3;8]$, $B[9;2]$ a $C[7;-3]$. Určete parametrické rovnice všech stran a těžnic v trojúhelníku *ABC*.
4. Rozhodněte, zda body $M[5;3]$ a $N\left[-\frac{31}{2};0\right]$ leží na přímce p dané bodem $A[-5;7]$ a vektorem $\vec{u}=(3;2)$.
5. Napiš parametrickou rovnici přímky procházející bodem C a rovnoběžnou s ↔ AB, je-li dáno:
   a. $A[1;1]$, $B[1;3]$ a $C[0;3]$
   b. $A[-1;1]$, $B[2;-3]$ a $C[1;5]$
6. Napiš parametrickou rovnici přímky p procházející bodem $A[1;3]$ a průsečíkem přímek $p(P;\vec{u})$ a $q(Q;\vec{v})$, kde $P[0;1]$, $\vec{u}=(1;0)$, $Q[-1;-1]$ a $\vec{v}=(1;-2)$.
7. Najdi parametrické vyjádření přímky r, která je kolmá na přímku $q: x=2-3t$, $y=3-6t, t\in R$ a prochází bodem $H[-1;2]$.

Řešení:

1.
   a. $p: x=1-3t; y=-2+4t, t\in R$
   b. $p: x=5+2t; y=3+t, t\in R$
   c. $p: x=2-7t; y=6+t, t\in R$
2.
   a. $p: x=2+4t; y=4-4t, t\in R$
   b. $p: x=2+t; y=4+t, t\in R$
   c. $p: x=2+t; y=4, t\in R$
   d. $p: x=3; y=5+t, t\in R$
3. $a: x=9-2t; y=2-6t, t\in R;$
   $b: x=-3+10t; y=8-11t, t\in R;$
   $c: x=-3+12t; y=8-6t, t\in R;$
   $t_a: x=-3+11t; y=8-8{,}5t, t\in R;$
   $t_b: x=9-7t; y=2+0{,}5t, t\in R;$
   $t_c: x=7-4t; y=-3+8t, t\in R.$
4. $M\notin p; N\in p$
5.
   a. $p: x=0; y=3+2t, t\in R$
   b. $p: x=1+3t; y=5-4t, t\in R$
6. $p: x=1-3t; y=3-2t, t\in R$
7. $p: x=-1+2t; y=2-t, t\in R$