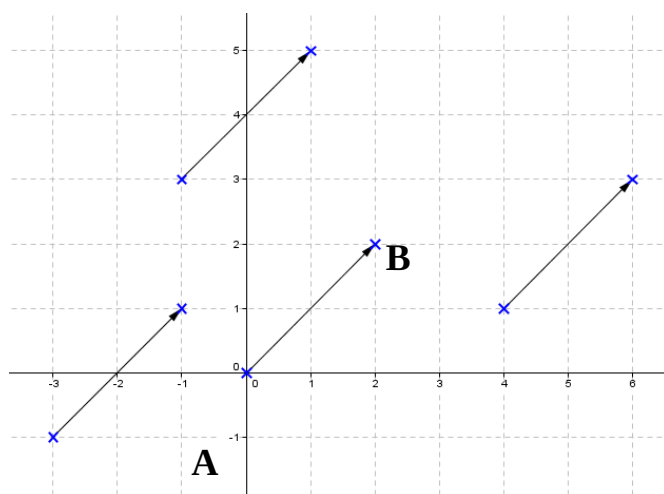
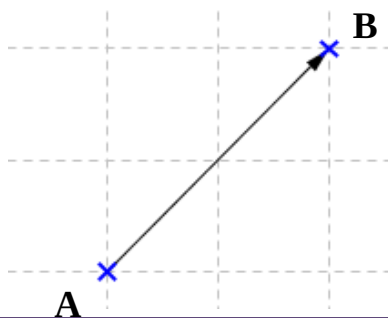


2.4 Vektory

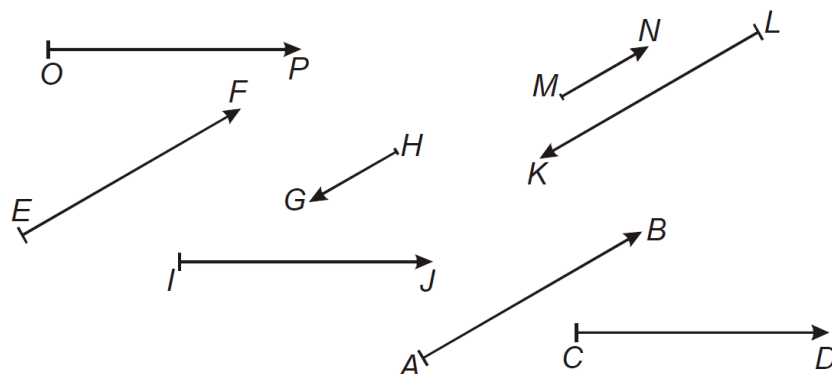
- určité fyzikální veličiny nelze určit pouze jedním číslem $\rightarrow$ síla, rychlost
 - mají dvě složky: velikost a směr!

Vektor = množina orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a stejný směr.

A je počáteční bod vektoru a *B* je koncový bod vektoru.



Př.: Které z orientovaných úseček na obrázku tvoří shodné vektory?



vektor **u**: orientované úsečky AB, EF

vektor **v**: orientované úsečky IJ, CD, OP

vektor **w**: orientovaná úsečka LK

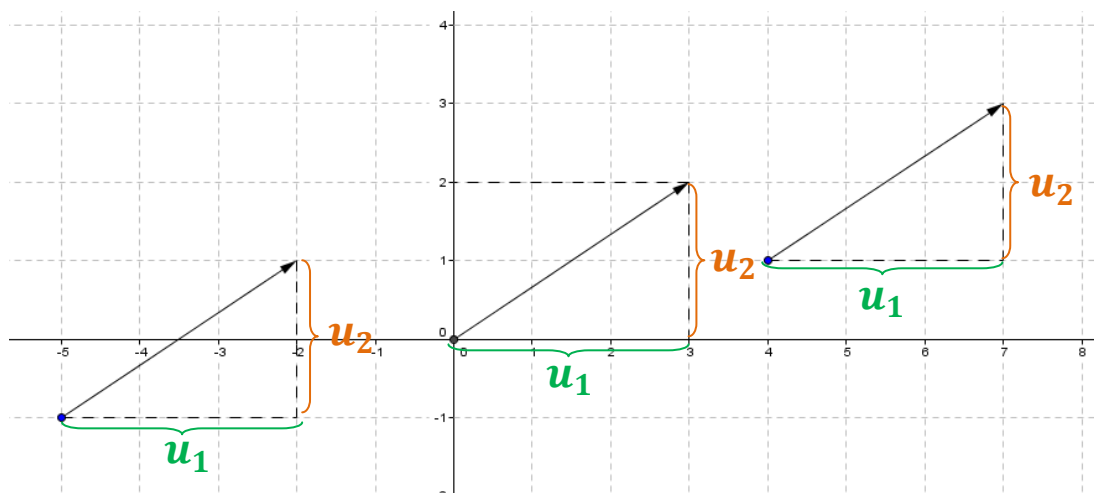
vektor **x**: orientovaná úsečka HG

vektor **y**: orientovaná úsečka MN

Nechť $\vec{u}$ je vektor v rovině a nechť AB je jeho umístění, kde $A[a_1; a_2]$ a $B[b_1; b_2]$.

Uspořádanou dvojici čísel $(u_1; u_2)$, kde $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$ budeme nazývat souřadnice vektoru $\vec{u}$ v rovině. Vektor $\vec{u}$ lze zapsat jako $\vec{u} = B - A$.

Zapisujeme $\vec{u} = (u_1; u_2)$.



Př.: Urči souřadnice vektoru:

- | | |
|---|-------------------------|
| a) $\vec{u} = AB$, kde $A[-5; 2]$ a $B[3; -4]$ | $[\vec{u} = (8; -6)]$ |
| b) $\vec{v} = CD$, kde $D[0; 1]$ a $C[-3; 8]$ | $[\vec{v} = (-3; 7)]$ |
| c) $\vec{w} = EF$, kde $E[3; 5]$ a $F[-3; -5]$ | $[\vec{w} = (-6; -10)]$ |

Př.: Urči chybějící souřadnice:

- | | |
|--|-------------------------|
| a) $\vec{u} = AB$, kde $\vec{u} = (-1; 3)$, $A[a_1; a_2]$ a $B[6; -2]$ | $[A[7; 5]]$ |
| b) $\vec{v} = CD$, kde $\vec{v} = (1; 5)$, $C[6; 1]$ a $D[d_1; d_2]$ | $[D[7; 6]]$ |
| c) $\vec{w} = EF$, kde $\vec{w} = (-4; 6)$, $E[3; e_2]$ a $F[f_1; -5]$ | $[e_2 = -11; f_1 = -1]$ |

Velikost vektoru $\vec{u}$ vypočítáme jako $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Př.: Urči velikost vektoru:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| a) $\vec{u} = AB$, kde $A[-3; 2]$ a $B[4; -4]$ | $[\vec{u} = \sqrt{85} \doteq 9,22]$ |
| b) $\vec{v} = CD$, kde $D[0; -1]$ a $D[-3; 8]$ | $[\vec{v} = \sqrt{90} \doteq 9,49]$ |

Opačný vektor k vektoru $\vec{u}$ je vektor $-\vec{u} = (-u_1; -u_2)$.

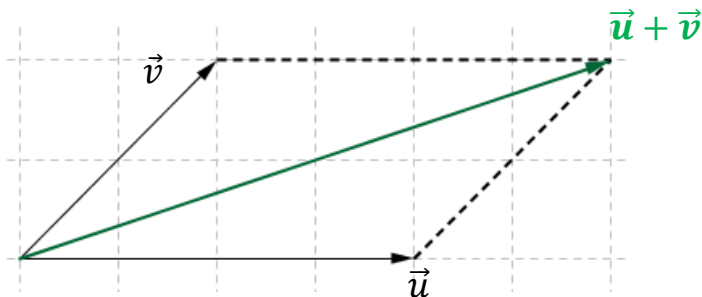
Př.: Urči opačný vektor k vektoru:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $\vec{u} = (6; -1)$ | $[-\vec{u} = (-6; 1)]$ |
| b) $\vec{v} = (0; 5)$ | $[-\vec{v} = (0; -5)]$ |

2.5 Operace s vektory

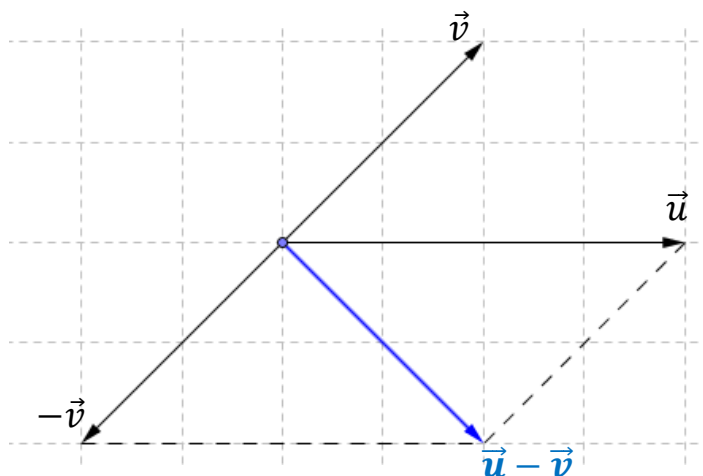
Součet vektorů definujeme jako $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$.

Grafický součet: doplnění na rovnoběžník



Rozdíl vektorů definujeme jako $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$.

Grafický rozdíl: rozdíl převedeme na součet vektoru $\vec{u}$ a vektoru opačného $-\vec{v}$



Př.: Vypočítej a graficky zakresli součet a rozdíl vektorů:

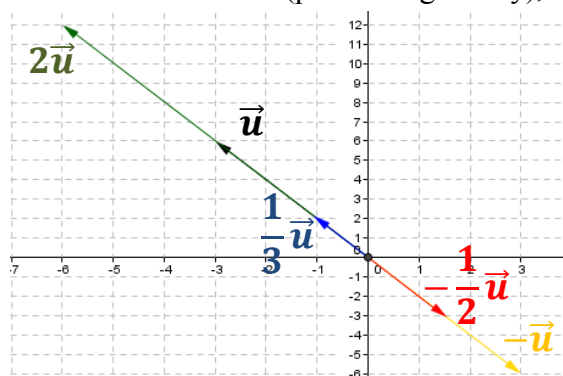
- $\vec{u} = (-1; 3), \vec{v} = (5; 2)$ [$\vec{u} + \vec{v} = (4; 5)$, $\vec{u} - \vec{v} = (-6; 1)$, $\vec{v} - \vec{u} = (6; -1)$]
- $\vec{a} = (0; 8), \vec{b} = (3; -4)$ [$\vec{a} + \vec{b} = (3; 4)$, $\vec{a} - \vec{b} = (-3; 12)$, $\vec{b} - \vec{a} = (3; -12)$]
- $\vec{e} = (5; 5), \vec{f} = (-1; -1)$ [$\vec{e} + \vec{f} = (4; 4)$, $\vec{e} - \vec{f} = (6; 6)$, $\vec{f} - \vec{e} = (-6; -6)$]

Násobení vektoru $\vec{u} = (u_1; u_2)$ **skalárem (konstantou) k** definujeme jako $k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1; k \cdot u_2)$.

Grafický násobek skalárem: zvětšení či zmenšení $\vec{u}$

Př.: Urči souřadnice vektoru $\vec{u} = (-3; 6)$ vynásobeného skalárem k (početně i graficky), kde

- $k = 2$ [$k \cdot \vec{u} = (-6; 12)$]
- $k = -1$ [$k \cdot \vec{u} = (3; -6)$]
- $k = \frac{1}{3}$ [$k \cdot \vec{u} = (-1; 2)$]
- $k = -\frac{1}{2}$ [$k \cdot \vec{u} = (1,5; -3)$]



Př.: Vypočítej souřadnice vektoru, je-li dáno:

a) $\vec{w} = 3\vec{u} - 4\vec{v}$, kde $\vec{u} = (2; 3)$, $\vec{v} = (-5; 0,4)$ $[\vec{w} = (26; 7,4)]$

b) $\vec{d} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$, kde $\vec{a} = (-2; 2)$, $\vec{b} = (6; -9)$, $\vec{c} = (1; 0)$ $[\vec{d} = (2; -5)]$

Dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou rovnoběžné právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého, tj. když existuje takové reálné číslo k , že platí $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.

Jestliže $k > 0$ jsou souhlasně rovnoběžné, pro $k < 0$ nesouhlasně rovnoběžné.

Př.: Urči, zda jsou dané vektory rovnoběžné

a) $\vec{u} = (-4; 6)$, $\vec{v} = (-8; 12)$ $[ano, \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}]$

b) $\vec{a} = (10; 8)$, $\vec{b} = (5; -4)$ $[ne]$

c) $\vec{e} = (9; 6)$, $\vec{f} = (-4,5; -3)$ $[ano, \vec{e} = -2\vec{f}]$

**Skalární součin vektorů $\vec{u} = (u_1; u_2)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2)$ definujeme jako: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$
Výsledkem je skalár – číslo.**

Urči skalární součin vektorů $\vec{u} = (-4; 6)$ a $\vec{v} = (-8; 12)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \cdot (-8) + 6 \cdot 12$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 32 + 72 = \overline{104}$$

Př.: Urči skalární součin vektorů:

a) $\vec{u} = (-2; 1)$, $\vec{v} = (3; 4)$ $[-2]$

b) $\vec{a} = (5; 2)$, $\vec{b} = (4; -10)$ $[0]$

Úhel vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ definujeme jako $\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Vektory jsou kolmé, jestliže jejich skalární součin je roven 0.

Př.: Urči úhel dvou vektorů:

a) $\vec{u} = (-2; 1)$, $\vec{v} = (3; 4)$ $[\varphi = 100^\circ]$

b) $\vec{u} = (2; 2)$, $\vec{v} = (3; -3)$ $[\varphi = 0^\circ]$

c) $\vec{u} = (4; 6)$, $\vec{v} = (3; -2)$ $[\varphi = 90^\circ]$

Př.: V kartézské soustavě souřadnic jsou dány body $A[0; 1]$, $B[-1; 2]$ a $C[1; 3]$. Urči velikost vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. $[\alpha = \beta = 71^\circ, \gamma = 38^\circ]$

Př.: Urči číslo t tak, aby byly vektory kolmé:

a) $\vec{u} = (2; -6)$, $\vec{v} = (t; 3)$ $[t = 9]$

b) $\vec{a} = (5; 2)$, $\vec{b} = (-3; t)$ $[t = 7,5]$

Operace s vektory – příklady

1. Určete chybějící souřadnici vektoru $\vec{u}$, je-li $|\vec{u}| = 34$, $\vec{u} = (-16; u_2)$.
2. Určete souřadnice počátečního bodu A vektoru $\vec{u} = AB$ a velikost vektoru $\vec{u}$, když $\vec{u} = (-15; 8)$ a $B[-7; 5]$.
3. Vypočítejte chybějící souřadnici vektoru $\vec{v}$ tak, aby platilo $\vec{u} = (5; 2)$, $\vec{v} = (1; v_2)$ a $|\vec{u} - \vec{v}| = 5$.
4. Zjistěte, zda body $A[-2; 10]$, $B[7; 3]$ a $C[1; 5]$ leží v jedné přímce či nikoli.
5. Jsou dány body $A[1; 2]$, $B[4; 7]$ a $C[7; -2]$. Stanovte bod D tak, aby ABCD byl rovnoběžník.
6. Dokažte, že body $A[-4; -2]$, $B[3; -5]$ a $C[0; 6]$ jsou vrcholy trojúhelníku. Potom vypočtěte souřadnice tří vektorů, které mají směr těžnic a počáteční bod v příslušném vrcholu trojúhelníku.
7. Jsou dány body $A[2; 3]$, $B[4; 5]$, $C[1; 7]$ a $D[2; 6]$. Urči souřadnice a načrtni vektory: $\vec{u} = BA$, $\vec{v} = CD$, $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{z} = \vec{u} + 3\vec{v}$, $\vec{x} = 3(\vec{u} - 4\vec{v})$.
8. Vrcholy trojúhelníku ABC jsou $A[1; 2]$, $B[0; 1]$ a $C[2; 1]$. Vypočítejte délky stran AB, AC a úhel při vrcholu A.
9. Ověřte, že trojúhelník ABC s vrcholy $A[5; -4]$, $B[3; 2]$ a $C[2; -5]$ je pravoúhlý.
10. Pro které souřadnice vektoru $\vec{u}$ platí, že $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, je-li $\vec{u} = (u_1; 2)$ a $\vec{v} = (4; 6)$.
11. Pro kterou hodnotu x platí, že skalární součin $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$, je-li $\vec{a} = (1; -2)$ a $\vec{b} = (4; x)$.
12. Určete souřadnice vektoru $\vec{u}$ tak, aby byl kolmý k vektoru $\vec{v} = (2; 3)$ a měl stejnou velikost.

Řešení:

1. $u_2 = \pm 30$
2. $A[8; -3]$, $|\vec{u}| = 17$
3. $\vec{v}_1 = (1; 5)$ a $\vec{v}_2 = (1; -1)$
4. neleží ($\overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{AC}$)
5. $D[4; -7]$
6. $\vec{t}_a = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $\vec{t}_b = (-5; 7)$, $\vec{t}_c = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{19}{2}\right)$
7. $\vec{u} = (-2; -2)$, $\vec{v} = (1; -1)$, $\vec{w} = (-3; -1)$, $\vec{z} = (1; -5)$, $\vec{x} = (-18; 6)$
8. $|AB| = \sqrt{5}$, $|AC| = \sqrt{2}$, $\alpha = 108^\circ$
9. $\alpha = 90^\circ$
10. $u_1 = -3$
11. $x = 3$
12. $\vec{u}_1 = (-3; 2)$ a $\vec{u}_2 = (3; -2)$