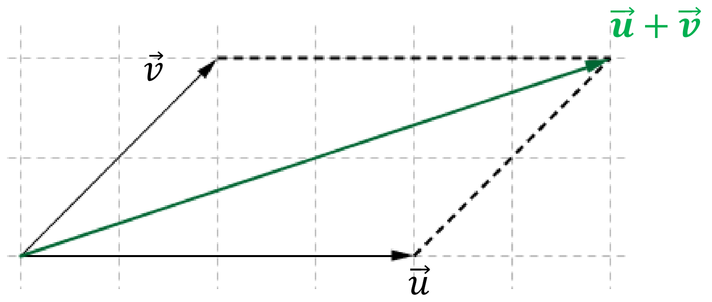
2.5 Operace s vektory

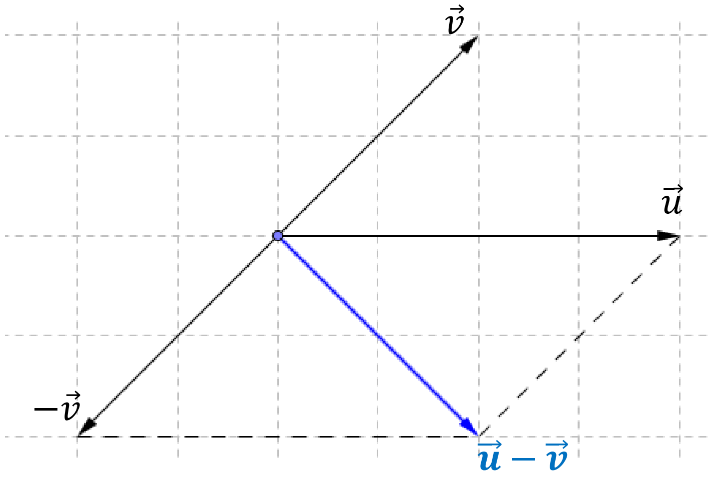
Součet vektorů definujeme jako $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$.

Grafický součet: doplnění na rovnoběžník



Rozdíl vektorů definujeme jako $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$.

Grafický rozdíl: rozdíl převedeme na součet vektoru $\vec{u}$ a vektoru opačného $-\vec{v}$



Př.: Vypočítej a graficky zakresli součet a rozdíl vektorů:

a) $\vec{u} = (-1; 3), \vec{v} = (5; 2)$ $[\vec{u} + \vec{v} = (4; 5),\ \vec{u} - \vec{v} = (-6; 1),\ \vec{v} - \vec{u} = (6; -1)]$

b) $\vec{a} = (0; 8), \vec{b} = (3; -4)$ $[\vec{a} + \vec{b} = (3; 4),\ \vec{a} - \vec{b} = (-3; 12),\ \vec{b} - \vec{a} = (3; -12)]$

c) $\vec{e} = (5; 5), \vec{f} = (-1; -1)$ $[\vec{e} + \vec{f} = (4; 4),\ \vec{e} - \vec{f} = (6; 6),\ \vec{f} - \vec{e} = (-6; -6)]$

Násobení vektoru $\vec{u} = (u_1; u_2)$ ***skalárem (konstantou) <u>k</u> definujeme jako*** $k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1; k \cdot u_2)$.

Grafický násobek skalárem: zvětšení či zmenšení $\vec{u}$

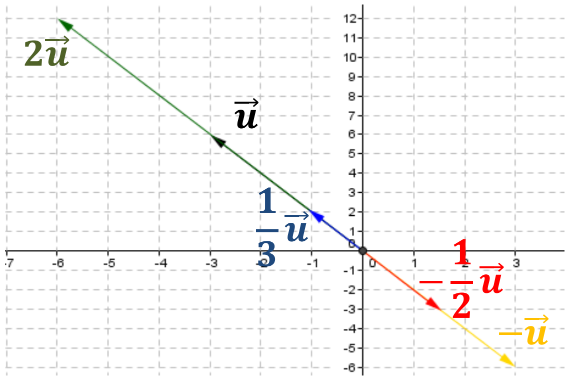
Př.: Urči souřadnice vektoru $\vec{u} = (-3; 6)$ vynásobeného skalárem k (početně i graficky), kde

a) $k = 2$ $[k \cdot \vec{u} = (-6; 12)]$

b) $k = -1$ $[k \cdot \vec{u} = (3; -6)]$

c) $k = \frac{1}{3}$ $[k \cdot \vec{u} = (-1; 2)]$

d) $k = -\frac{1}{2}$ $[k \cdot \vec{u} = (1{,}5; -3)]$



Př.: Vypočítej souřadnice vektoru, je-li dáno:

a) $\vec{w} = 3\vec{u} - 4\vec{v}$, kde $\vec{u} = (2; 3), \vec{v} = (-5; 0{,}4)$ $[\vec{w} = (26; 7{,}4)]$

b) $\vec{d} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$, kde $\vec{a} = (-2; 2), \overrightarrow{b} = (6; -9), \vec{c} = (1; 0)$ $\left[\vec{d} = (2; -5)\right]$

Dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou rovnoběžné právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého, tj. když existuje takové reálné číslo k, že platí $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.
Jestliže $k > 0$ jsou souhlasně rovnoběžné, pro $k < 0$ nesouhlasně rovnoběžné.

Př.: Urči, zda jsou dané vektory rovnoběžné

a) $\vec{u} = (-4; 6), \vec{v} = (-8; 12)$ $\left[ano,\ \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}\right]$

b) $\vec{a} = (10; 8), \vec{b} = (5; -4)$ $[ne]$

c) $\vec{e} = (9; 6), \vec{f} = (-4{,}5; -3)$ $[ano,\ \vec{e} = -2\vec{v}]$

Skalární součin vektorů $\vec{u} = (u_1; u_2)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2)$ definujeme jako: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$
Výsledkem je skalár – číslo.

Urči skalární součin vektorů $\vec{u} = (-4; 6)$ a $\vec{v} = (-8; 12)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \cdot (-8) + 6 \cdot 12$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 32 + 72 = \underline{\underline{104}}$$

Př.: Urči skalární součin vektorů:

a) $\vec{u} = (-2; 1), \vec{v} = (3; 4)$ $[-2]$

b) $\vec{a} = (5; 2), \vec{b} = (4; -10)$ $[0]$

Úhel vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ definujeme jako $\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
Vektory jsou kolmé, jestliže jejich skalární součin je roven 0.

Př.: Urči úhel dvou vektorů:

a) $\vec{u} = (-2; 1), \vec{v} = (3; 4)$ $[\varphi = 100°]$

b) $\vec{u} = (2; 2), \vec{v} = (3; -3)$ $[\varphi = 0°]$

c) $\vec{u} = (4; 6), \vec{v} = (3; -2)$ $[\varphi = 90°]$

Př.: V kartézské soustavě souřadnic jsou dány body $A[0; 1], B[-1; 2]$ a $C[1; 3]$. Urči velikost vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. $[\alpha = \beta = 71°,\quad \gamma = 38°]$

Př.: Urči číslo *t* tak, aby byly vektory kolmé:

a) $\vec{u} = (2; -6), \vec{v} = (t; 3)$ $[t = 9]$

b) $\vec{a} = (5; 2), \vec{b} = (-3; t)$ $[t = 7{,}5]$

Operace s vektory – příklady

1. Určete chybějící souřadnici vektoru $\vec{u}$, je-li $|\vec{u}| = 34,\ \vec{u} = (-16; u_2)$.
2. Určete souřadnice počátečního bodu A vektoru $\vec{u} = AB$ a velikost vektoru $\vec{u}$, když $\vec{u} = (-15; 8)$ a $B[-7; 5]$.
3. Vypočítejte chybějící souřadnici vektoru $\vec{v}$ tak, aby platilo $\vec{u} = (5; 2), \vec{v} = (1; v_2)$ a $|\vec{u} - \vec{v}| = 5$.
4. Zjistěte, zda body $A[-2; 10], B[7; 3]$ a $C[1; 5]$ leží v jedné přímce či nikoli.
5. Jsou dány body $A[1; 2], B[4; 7]$ a $C[7; -2]$. Stanovte bod D tak, aby ABCD byl rovnoběžník.
6. Dokažte, že body $A[-4; -2], B[3; -5]$ a $C[0; 6]$ jsou vrcholy trojúhelníku. Potom vypočtěte souřadnice tří vektorů, které mají směr těžnic a počáteční bod v příslušném vrcholu trojúhelníku.
7. Jsou dány body $A[2; 3], B[4; 5]$, $C[1; 7]$ a $D[2; 6]$. Urči souřadnice a načrtni vektory: $\vec{u} = BA$, $\vec{v} = CD, \vec{w} = \vec{u} - \vec{v}, \vec{z} = \vec{u} + 3\vec{v}, \vec{x} = 3(\vec{u} - 4\vec{v})$.
8. Vrcholy trojúhelníku ABC jsou $A[1; 2], B[0; 1]$ a $C[2; 1]$. Vypočítejte délky stran AB, AC a úhel při vrcholu A.
9. Ověřte, že trojúhelník ABC s vrcholy $A[5; -4], B[3; 2]$ a $C[2; -5]$ je pravoúhlý.
10. Pro které souřadnice vektoru $\vec{u}$ platí, že $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, je-li $\vec{u} = (u_1; 2)$ a $\vec{v} = (4; 6)$.
11. Pro kterou hodnotu x platí, že skalární součin $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$, je-li $\vec{a} = (1; -2)$ a $\vec{b} = (4; x)$.
12. Určete souřadnice vektoru $\vec{u}$ tak, aby byl kolmý k vektoru $\vec{v} = (2; 3)$ a měl stejnou velikost.

Řešení:

1. $\mathrm{u}_2 = \pm 30$
2. $A[8; -3],\ |\vec{u}| = 17$
3. $\vec{v_1} = (1; 5)$ a $\vec{v_2} = (1; -1)$
4. neleží $(\overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{AC})$
5. $D[4; -7]$
6. $\vec{t_a} = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right), \vec{t_b} = (-5; 7), \vec{t_c} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{19}{2}\right)\backslash$
7. $\vec{u} = (-2; -2), \vec{v} = (1; -1), \vec{w} = (-3; -1), \vec{z} = (1; -5), \vec{x} = (-18; 6)$
8. $|AB| = \sqrt{5}, |AC| = \sqrt{2}, \alpha = 108^\circ$
9. $\alpha = 90^\circ$
10. $\mathrm{u}_1 = -3$
11. $\mathrm{x} = 3$
12. $\vec{u_1} = (-3; 2)$ a $\vec{u_2} = (3; -2)$