

2.6 Přímka v rovině

2.6.1 Parametrické vyjádření

Každou přímku lze zadat pomocí bodu a směru (vektoru).

Mějme bod $A[a_1; a_2]$ a vektor $\vec{s} = (s_1; s_2)$. Parametrické vyjádření (parametrickou rovnici) přímky p definujeme jako:

$$x = a_1 + t \cdot s_1$$

$$y = a_2 + t \cdot s_2, t \in \mathbb{R}$$

Schematicky lze přímku vyjádřit jako: $X = A + t \cdot \vec{s}$

Každé hodnotě parametru t odpovídá jeden bod přímky. Vektor $\vec{s}$ se nazývá směrový vektor přímky (takový nenulový vektor, který je s danou přímkou rovnoběžný – má stejný směr).

$t \in \mathbb{R}$ – přímka, $t \in \langle 0; 1 \rangle$ – úsečka, $t \in \langle 0; \infty \rangle$ – polopřímka.

Napiš parametrické vyjádření přímky p , na které leží body $A[5; 3]$ a $B[-1; 6]$:

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (-6; 3)$$

$$p: \quad x = a_1 + t \cdot s_1$$

$$y = a_2 + t \cdot s_2, t \in \mathbb{R}$$

$$p: \quad x = 5 - 6t$$

$$y = -1 + 3t, t \in \mathbb{R}$$

Př.: Napiš parametrické vyjádření přímky p , ve které je dáno:

$$a) \quad \vec{s} = (-2; 1), A[3; 5] \quad [x = 3 - 2t; y = 5 + t]$$

$$b) \quad \vec{s} = (0; 4), A[-2; 5] \quad [x = -2; y = 5 + 4t]$$

$$c) \quad R[0; 7], S[-3; -2] \quad [x = -3t; y = 7 - 2t]$$

$$d) \quad U[8; -2], V[10; 15] \quad [x = 8 + 2t; y = -2 + 17t]$$

Př.: Urči směrový vektor přímky p , která je zadána parametricky:

$$a) \quad p: x = 5 - 8t; y = -1 + 2t \quad [\vec{s} = (-8; 2)]$$

$$b) \quad p: x = 2,5 + t; y = 7,5 - 1,5t \quad [\vec{s} = (1; -1,5)]$$

$$c) \quad p: x = -t; y = 3 \quad [\vec{s} = (-1; 0)]$$

Zjisti, zda body $P[1; 2]$ a $Q[3; 1]$ leží na přímce p , která má parametrické vyjádření

$$\begin{array}{lcl}
 p: & x = 2 - t & \\
 & y = 3 + 2t, t \in \mathbb{R} & \\
 \hline
 P: & 1 = 2 - t & \rightarrow t = 1 \\
 & 2 = 3 + 2t, t \in \mathbb{R} & \rightarrow t = -\frac{1}{2} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1 = 2 - t \\ 2 = 3 + 2t \end{array}} \right\} \underline{\underline{P \notin p}} \\
 Q: & 3 = 2 - t & \rightarrow t = -1 \\
 & 1 = 3 + 2t, t \in \mathbb{R} & \rightarrow t = -1 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3 = 2 - t \\ 1 = 3 + 2t \end{array}} \right\} \underline{\underline{Q \in p}}
 \end{array}$$

Př.: Zjisti, zda body $U[-2; 6]$ a $V[8; 0]$ leží na přímce $a: x = -16 + 7t; y = 18 - 6t, t \in \mathbb{R}$. $[U \in a; V \notin a]$

2.6.2 Vzájemná poloha přímek daných parametricky

Přímky mohou být rovnoběžné (totožné či různé) nebo různoběžné (průsečík).

Jsou dány přímky $p(A; \vec{u})$ a $q(Q; \vec{v})$, kde $A[4; 0], \vec{u} = (1; -1), B[-1; 2]$ a $\vec{v} = (2; 1)$.

Zjisti vzájemnou polohu těchto přímek.

Napíšeme příslušné parametrické rovnice obou přímek:

$$\begin{array}{ll}
 p: & x = 4 + t \\
 & y = -t, t \in \mathbb{R} \\
 q: & x = -1 + 2r \\
 & y = 2 + r, r \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

Hledáme společné body obou přímek $\rightarrow$ řešíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{lcl}
 p \cap q: & 4 + t = -1 + 2r & \\
 & -t = 2 + r & \\
 & t = -2 - r &
 \end{array}$$

$$4 + (-2 - r) = -1 + 2r$$

$$-3r = -3$$

$$r = 1$$

dosadíme *parametr* (r) do odpovídající rovnice

$$x = -1 + 2 = 1$$

$$y = 2 + 1 = 3$$

$$\underline{\underline{P[1; 3]}}$$

Přímky jsou různoběžné, protože mají společný bod $P[1; 3]$.

Př.: Urči vzájemnou polohu přímek (případně souřadnice průsečíku)

$$\begin{aligned} \text{a) } & p: x = 1 + 2t; y = 2 - 3t \\ & q: x = -r; y = 1 + 1,5r \end{aligned} \quad [p \parallel q \text{ (různé)}]$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & p(P, \vec{u}): P[3; 2], \vec{u} = (2; -1) \\ & q: x = -1 + r; y = 1 + r \end{aligned} \quad [p \nparallel q, R[1; 3]]$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & p(P, \vec{u}): P\left[\frac{3}{2}; 1\right], \vec{u} = (-1; 2) \\ & q(Q, \vec{v}): Q[-1; 6], \vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -1\right) \end{aligned} \quad [p = q]$$

Parametrické vyjádření přímky – příklady

- Napište parametrické vyjádření přímky p dané:
 - bodem $A[1; -2]$ a vektorem $\vec{u} = (-3; 4)$ s ní rovnoběžným
 - bodem $A[5; 3]$ a $B[7; 4]$
 - kteřá prochází bodem $A[2; 6]$ a je rovnoběžná s přímkou $\overleftrightarrow{BC}$, kde $B[3; 7]$ a $C[-4; 8]$
- Jsou dány body $A[2; 4]$, $B[3; 5]$ a $C[7; 1]$. Napište parametrické rovnice přímky p :
 - $A \in p, p \parallel \overleftrightarrow{BC}$
 - $p \Leftrightarrow AB$
 - $A \in p, p$ je rovnoběžná s osou x
 - $B \in p, p$ je rovnoběžná s osou y
- Jsou dány body $A[-3; 8]$, $B[9; 2]$ a $C[7; -3]$. Určete parametrické rovnice všech stran a těžnic v trojúhelníku ABC .
- Rozhodněte, zda body $M[5; 3]$ a $N[-\frac{31}{2}; 0]$ leží na přímce p dané bodem $A[-5; 7]$ a vektorem $\vec{u} = (3; 2)$.
- Napiš parametrickou rovnici přímky procházející bodem C a rovnoběžnou s $\leftrightarrow AB$, je-li dáno:
 - $A[1; 1]$, $B[1; 3]$ a $C[0; 3]$
 - $A[-1; 1]$, $B[2; -3]$ a $C[1; 5]$
- Napiš parametrickou rovnici přímky p procházející bodem $A[1; 3]$ a průsečíkem přímek $p(P; \vec{u})$ a $q(Q; \vec{v})$, kde $P[0; 1]$, $\vec{u} = (1; 0)$, $Q[-1; -1]$ a $\vec{v} = (1; -2)$.
- Najdi parametrické vyjádření přímky r , která je kolmá na přímkou $q: x = 2 - 3t, y = 3 - 6t, t \in R$ a prochází bodem $H[-1; 2]$.

Řešení:

- $p: x = 1 - 3t; y = -2 + 4t, t \in R$
 - $p: x = 5 + 2t; y = 3 + t, t \in R$
 - $p: x = 2 - 7t; y = 6 + t, t \in R$
- $p: x = 2 + 4t; y = 4 - 4t, t \in R$
 - $p: x = 2 + t; y = 4 + t, t \in R$
 - $p: x = 2 + t; y = 4, t \in R$
 - $p: x = 3; y = 5 + t, t \in R$
- $a: x = 9 - 2t; y = 2 - 5t, t \in R;$
 $b: x = -3 + 10t; y = 8 - 11t, t \in R;$
 $c: x = -3 + 12t; y = 8 - 6t, t \in R;$
 $t_a: x = -3 + 11t; y = 8 - 8,5t, t \in R;$
 $t_b: x = 9 - 7t; y = 2 + 0,5t, t \in R;$
 $t_c: x = 7 - 4t; y = -3 + 8t, t \in R.$
- $M \notin p; N \in p$
- $p: x = 0; y = 3 + 2t, t \in R$
 - $p: x = 1 + 3t; y = 5 - 4t, t \in R$
- $p: x = 1 - 3t; y = 3 - 2t, t \in R$
- $p: x = -1 + 2t; y = 2 - t, t \in R$