

3 Kombinatorika

Kombinatorika = část matematiky zabývající se skupinami prvků množin s definovanou strukturou.

B. Pascal



P. Fermat



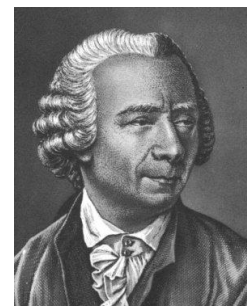
J. Bernoulli



G. W. Leibnitz



L. Euler



3.1 Základní kombinatorická pravidla

Př.: Kolik je možností jak vybrat dvojici kluk-holka z Vaší třídy, které Vás budou reprezentovat na matematické soutěži?

3.L 2 kluci a 30 holek

$$\begin{array}{ccc} \text{dvojice:} & 2 & \cdot & 30 = \underline{\underline{60}} \\ & \bullet & & \bullet \\ & \text{kluk} & & \text{holka} \end{array}$$

Př.: V 1.A je 30 žáků, v 1.B je 28 žáků a v 1. G je 32 žáků. Kolika způsoby je možné sestavit delegaci do žákovské rady, která obsahuje z každé třídy právě jednoho žáka?

$$\begin{array}{ccccccc} \text{trojice:} & & 30 & \cdot & 28 & \cdot & 32 & = \underline{\underline{26880}} \\ & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \\ & 1.A & & 1.B & & 1.C & & \end{array}$$

Př.: Urči počet všech trojiciferných čísel, ve kterých se

a) žádná cifra neopakuje

$$\begin{array}{ccccccc} \text{trojice:} & 9 & \cdot & 9 & \cdot & 8 & = \underline{\underline{648}} \\ & \bullet & & \bullet & & \bullet & \end{array}$$

b) mohou cifry opakovat

$$\begin{array}{ccccccc} \text{trojice:} & 9 & \cdot & 10 & \cdot & 10 & = 900 \quad \underline{\underline{\quad}} \\ & \bullet & & \bullet & & \bullet & \end{array}$$

Kombinatorické pravidlo součinu:

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Př.: Kolik státních poznávacích značek je možné sestavit, pokud mají tvar CPC-CCCC, kde C znamená číslici a P znamená písmeno? [26 000 000]

Př.: Urči počet všech čtyřciferných čísel, ve kterých se žádná cifra neopakuje. [4 536]

Př.: Urči počet všech čtyřciferných čísel, ve kterých se žádná cifra neopakuje a která

a) se skládají pouze z lichých cifer [120]

b) se skládají pouze ze sudých cifer [96]

c) mají jako třetí cifru 2 [448]

Př.: Barvy na monitoru jsou vytvářeny smícháním tří barev (RGB). Jas každé z nich můžeme měnit od 0 do 256. Kolik barev je na monitoru možné vytvořit? [16 974 593]

Př.: Ve třídě je 16 holek a 14 kluků. Urči, kolika způsoby je možné zvolit ze studentů třídy samosprávu (předseda a místopředseda) tak, aby v ní byl jeden kluk a jedna dívka.

- předseda je holka, místopředseda je kluk: $16 \cdot 14 = 224$

- předseda je kluk, místopředseda je holka: $14 \cdot 16 = 224$

→ celkem $224 + 224 = \underline{448}$

Př.: Ve třídě je 18 dívek a 11 chlapců. Kolika způsoby je možné vybrat předsedu a místopředsedu tak, aby alespoň jedním z nich byla dívka.

- dvě dívky: $18 \cdot 17 = 306$

- dívka je předseda: $18 \cdot 11 = 198$

- dívka je místopředseda: $11 \cdot 18 = 198$

→ celkem $306 + 198 + 198 = \underline{702}$

Kombinatorické pravidlo součtu:

Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvků a jsou-li každé dvě disjunktní (mají prázdný průnik), pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

Př.: Urči počet všech trojčiferných čísel s různými ciframi, které jsou:

a) dělitelné 5

- na konci je 0: $9 \cdot 8 = 72$

- na konci je 5: $8 \cdot 8 = 64$

→ celkem $72 + 64 = \underline{136}$

b) sudé

- na konci je 0: $9 \cdot 8 = 72$

- na konci je 2: $8 \cdot 8 = 64$

- na konci je 4: $8 \cdot 8 = 64$

- na konci je 6: $8 \cdot 8 = 64$

- na konci je 8: $8 \cdot 8 = 64$

- → celkem $72 + 4 \cdot 64 = \underline{328}$

Př.: Urči počet všech čtyřčiferných čísel,

a) které jsou lichá:

- na konci je 1, 3, 5, 7, 9: $5 \cdot (8 \cdot 9 \cdot 9) = \underline{3240}$

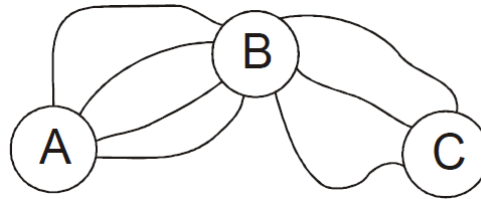
b) která jsou sudá:

- na konci je 0: $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$

- na konci je 2, 4, 6, 8: $4 \cdot (8 \cdot 9 \cdot 9) = 2592$

→ celkem $729 + 2592 = \underline{3321}$

Př.: Z místa A do místa B vedou čtyři turistické trasy, z místa B do místa C tři. Urči, kolika způsoby lze vybrat trasu z A do C a zpět tak, že právě jedna ze zmiňovaných sedmi cest bude použita dvakrát (tedy při cestě z A do C i při cestě zpět).



- cesta tam: $4 \cdot 3 = 12$
 - cesta zpět (stejná mezi C a B): $1 \cdot 3 = 3$
 - cesta zpět (stejná mezi B a A): $2 \cdot 1 = 2$
- celkem $12 \cdot (3 + 2) = \underline{\underline{60}}$

3.2 Variace

Kolika možnými způsoby může být mezi 4 finalisty olympijského akrobatického lyžování rozdělena zlatá, stříbrná a bronzová medaile?

Vybíráme trojice ze 4 prvků, kde se každý prvek objeví nejvýš jednou a **záleží na jejich pořadí**.

(a, b, c)	(a, c, b)	(b, a, c)	(b, c, a)	(c, a, b)	(c, b, a)
(a, b, d)	(a, d, b)	(b, a, d)	(b, d, a)	(d, a, b)	(d, b, a)
(a, c, d)	(a, d, c)	(c, a, d)	(c, d, a)	(d, a, c)	(d, c, a)
(b, c, d)	(b, d, c)	(c, b, d)	(c, d, b)	(d, b, c)	(d, c, b)

24 možností

$V_k(n)$ – k -členná variace z n prvků je uspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. $V_k(n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$

Výpočet předchozího příkladu pomocí vzorce: $n - k + 1 = 4 - 3 + 1 = 2$

$$V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \underline{\underline{24}}$$

Př.: Vypočítej:

- a) $V_3(6)$ c) $V_1(8)$
b) $V_5(20)$ d) $V_6(6)$

Př.: Na hasičském plese se 10 hlavních cen v tombole losuje z 250 lístků. Kolika způsoby může toto losování dopadnout?

$$V_{10}(250) = 250 \cdot 249 \cdot 248 \cdot 247 \cdot 246 \cdot 245 \cdot 244 \cdot 243 \cdot 242 \cdot 241 = \underline{\underline{7,95 \cdot 10^{23}}}$$

Př.: Na zkoušení jsou připraveny dvě otázky (otázky nejsou stejné) pro dva studenty a studenti jsou losováni náhodně. Kolika způsoby může losování dopadnout, pokud je ve třídě 31 studentů? $[V_2(31) = 31 \cdot 30 = 930]$

Př.: K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

- a) Urči počet všech vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit. $[V_3(5) = 60]$
b) Kolik vlajek má modrý pruh uprostřed? $[V_2(4) = 12]$
c) Kolik vlajek má modrý pruh? $[3 \cdot V_2(4) = 36]$
d) Kolik vlajek nemá uprostřed modrý pruh? $[2 \cdot V_2(4) + V_3(4) = 48]$
e) Kolik vlajek nemá žlutý pruh? $[V_3(4) = 24]$

Př.: Urči, kolik různých přirozených čtyřciferných čísel je možné sestavit z číslic 1, 2, 3, 4 a 5 (každou číslici můžeme použít pouze jednou). $[V_4(5) = 120]$

- a) Kolik z nich je dělitelných pěti? $[V_3(4) = 24]$
b) Kolik z nich je sudých? $[2 \cdot V_3(4) = 48]$
c) Kolik z nich je dělitelných třemi? $[V_4(4) = 24]$
d) Kolik z nich je dělitelných šesti? $[2 \cdot V_3(3) = 12]$